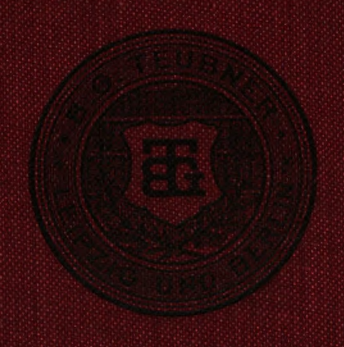
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE
12

DIE THEORIE DER WECHSELSTRÖME

VON

DR. ERNST ORLICH



Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende.

Herausgegeben von **Dr. E. Jahnke,**
Prof. a. d. Kgl. Bergakademie zu Berlin.

Die Entwicklung der modernen Technik drängt auf stärkere Heranziehung der mathematischen Methoden. Der Ingenieur indessen, welcher bereit ist, sich mit dem nötigen Rüstzeug zu versehen, sieht sich vergeblich nach kurzen Darstellungen um, die geeignet wären, ihn schnell in das besondere Gebiet, das ihn gerade interessiert, einzuführen. — Diese Lücke will vorliegende Sammlung ausfüllen. Sie setzt sich zum Ziel, dem Ingenieur Schriften zu bieten, welche auf etwa 100 Seiten für ein eng begrenztes Gebiet die mathematischen Methoden einfach und ... eit in ... n. Da ... d- pu ... er nic ... uf gel ... g- ke ... ge zu ... en Ge ... es Ga ...

I. E ... in ... a. d. Univ. Tübingen. 1908. Geh. *M.* 2.40, geb. *M.* 2.80.

II. **Elektromagnet. Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln.** Von K. W. Wagner, Ingen. i. Charlottenburg. 1908. Geh. *M.* 2.40, geb. *M.* 2.80.

III. **Einführ. in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus.** Von Cl. Schaefer, Privatdoz. a. d. Univ. Breslau. 1908. Geh. *M.* 3.40, geb. *M.* 3.80.

IV. **Die Theorie der Besselschen Funktionen.** Von P. Schafheitlin, Prof. am Sophien-Realgymn. zu Berlin. 1908. Geh. *M.* 2.80, geb. *M.* 3.20.

V. **Funktionentafeln m. ... und Kurven.** Von E. ...

VI, 1 u. 2. **Die Vektoranalysis und ihre Anwendungen in der theoret. Physik.** Von W. v. Ignatowsky in Berlin. I. Teil. 1909. II. Teil. 1910. Geh. je *M.* 2.60, geb. je *M.* 3.—

VII. **Theorie d. Kräftepläne.** Von H. E. Timerding, Prof. a. d. Techn. Hochschule Braunschweig. 1910. Geh. *M.* 2.60, geb. *M.* 3.—

VIII. **Mathematische Theorie der astronom. Finsternisse.** Von P. Schwahn, Direktor der Urania in Berlin. 1910. Geh. *M.* 3.20, geb. *M.* 3.60.

IX. **Die Determinanten.** Von E. Netto, Prof. an der Univ. ... 1910. Geh. *M.* 3.20,

X, 1. **Einführ. in die kinetische Theorie der Gase.** Von A. Byk, Privatdoz. a. d. Univ. u. Tech. Hochsch. Berlin. I. Teil: Die idealen Gase. 1910. Geh. *M* 2.80, geb. *M* 3.20.

XI, 1. **Akustik.** Von A Kalähne, Prof. a. d. Techn. Hochschule Danzig. I. Teil. 1910.

In Vorbereitung:

Die Randwertaufgaben in der theoret. Physik. V. P. Debye, Dipl.-Ing. in München.

Die mathematischen Instrumente. Von A. Galle, Prof. a. Geodät. Institut b. Berlin.

Potentialtheorie. Von R. Gans, Prof. an der Univ. Tübingen.

Dispersion und Absorption des Lichtes. Von D. Goldhammer, Prof. a. d. Univ. Kasan.

Getriebelehre. Von M. Grübler, Prof. an der Techn. Hochschule Dresden.

Schwingungsprobleme. Von E. Grüneisen, Privatdoz. an der Universität Berlin.

Festigkeitsprobleme der modernen Maschinentechnik. Von Th. v. Karman, an der Univ. Göttingen.

Theorie der ellipt. Funktionen. Von M. Krause und E. Naetsch, Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden.

Thermoelektrizität. Von F. Krüger, Privatdoz. an der Univ. Göttingen.

Konforme Abbildung. Von L. Lewent, Oberlehrer in Berlin.

Über Berechnung spezieller elektrischer und magnetischer Felder. Von Dr.-Ing. u. Dr. phil. L. Lichtenstein in Charlottenburg.

Einführung in die Elastizitätstheorie. Von R. Marcolongo, Prof. an der Univ. Neapel.

Aus der Berufsgeschichte des Ingenieurs an Hand seiner Werke. Von Matschoss, Privatdoz. a. d. Techn. Hochschule Berlin.

Technische Hydromechanik. Von Dr. R. Edler von Mises, Ingenieur in Straßburg i. E.

Grundlagen der Zeit- und Ortsbestimmungen. Von Dr. J. Möller, Oberlehr. i. Elsfleth.

Die Grundlagen der Wechselstromtechnik. Von Prof. E. Orlich a. d. Physik.-Techn. Reichsanst. Charlottenburg.

Die Streuung des Transformators. Von Dr.-Ing. W. Rogowski, a. d. Physik.-Techn. Reichsanst. Charlottenburg.

Die Fourierschen Reihen. Von R. Rothe, Prof. an der Kgl. Bergakademie Clausthal.

Die partiellen Differentialgleichungen. Von R. Rothe in Clausthal.

Elektromagnetische Schwingungen. Von Dr.-Ing. R. Rüdenberg in Berlin.

Die Theorie der Ionisation der Gase. Von G. Rümelin, Privatdoz. a. d. Univ. Freiburg.

Seismik. Von H. Schering, an der Physik.-Techn. Reichsanstalt Charlottenburg.

Aerodynamische Grundlagen der Flugtechnik. Von W. Schlink, Prof. a. d. Techn. Hochschule Braunschweig.

Die Wechselstrommotoren. Von J. Sumec, Prof. a. d. Techn. Hochschule Brünn.

Ausgew. Spannungsprobleme des Bauingenieurs. Von A. Timpe, Privatdozent a. d. Techn. Hochschule Aachen.

Temperaturmessungen. Von S. Valentiner, Dozent an der Techn. Hochschule Hannover.

☛ **Die Sammlung wird fortgesetzt.**

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE
12

DIE THEORIE DER WECHSELSTRÖME

VON

DR. ERNST ORLICH
MITGLIED DER PHYSIKALISCH-TECHNISCHEN REICHSANSTALT

MIT 37 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912



Vorwort.

Das vorliegende Büchlein ist als eine Einleitung in die Wechselstromtechnik anzusehen. Es behandelt die Frage, in welcher Weise Wechselströme mathematisch dargestellt werden können, oder umgekehrt: die Theorie der einfach periodischen Funktionen im Hinblick auf ihre Anwendungen für die Wechselströme. Im besonderen ist eine eingehendere Betrachtung den Grenzen gewidmet, bis zu denen die üblichen Darstellungsformen von Wechselströmen streng richtig sind; die landläufigen Darstellungen lassen in dieser Hinsicht oft zu wünschen übrig. Die allgemeinen Betrachtungen sind durch Beispiele aus der Praxis erläutert. Um nicht dem Buche eine zu große Ausdehnung zu geben, ist die Kenntnis der wichtigsten physikalischen Tatsachen der Elektrizitätslehre als bekannt vorausgesetzt.

Einem neueren internationalen Abkommen zufolge (s. E. T. Z. 1911, S. 673) sind Widerstände stets mit r bezeichnet; dagegen habe ich dem dort gemachten Vorschlage, *EMKe* durch e zu bezeichnen, nicht folgen können, weil bei der symbolischen Darstellung die Basis der natürlichen Logarithmen mit dem gleichen Buchstaben gebraucht wird. Weiter ist, wie jetzt viel in Technikerkreisen üblich, $\sqrt{-1} = j$ gesetzt, um nicht auch mit der Strombezeichnung in Kollision zu kommen.

Friedenau, Juli 1911.

E. Orlich.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Die einwelligen Ströme und ihre fundamentalen Eigenschaften.

Zweiter Abschnitt.

Die mehrwelligen Ströme.

Dritter Abschnitt.

Die Mehrphasenströme.

Vierter Abschnitt.

Die Hautwirkung bei Wechselströmen.

Erster Abschnitt.

Die einwelligen Ströme und ihre fundamentalen Eigenschaften.

1. Die Konstanten eines einwelligen Stromes. Die allgemeinen Betrachtungen über die mathematische Darstellung periodischer Größen, welche im folgenden gegeben werden, beziehen sich in gleicher Weise auf Wechselströme und Wechselspannungen. Wenn also dabei der Einfachheit halber lediglich von Wechselströmen die Rede ist, so gelten die gewonnenen Resultate sinngemäß auch für Wechselspannungen und umgekehrt.

Die strenge allgemeine Definition eines Wechselstromes wollen wir auf später verschieben (vgl. S. 25) und uns zunächst darauf beschränken, eine besonders einfache Gattung von Wechselströmen zu betrachten, nämlich diejenigen, die sich durch die einfachste periodische Funktion, die es gibt, die Sinusfunktion, darstellen lassen. Ein solcher Wechselstrom wird einwelliger oder Sinusstrom genannt und durch die Gleichung

$$i = i_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

dargestellt. Darin bedeutet

t die Zeit,

i den sogenannten Augenblickswert des Stromes für die einzelnen Zeitpunkte,

i_m, ω, φ Konstante, deren Bedeutung zu erörtern ist.

Da der Sinus eine Funktion ist, die zwischen den Grenzwerten $+1$ und -1 liegt, so bedeutet i_m die Höchstwerte des Wechselstromes, zwischen denen er in der einen und anderen Richtung hin- und herschwankt (Fig. 1).

Ist weiter T die Dauer einer Periode des Stromes, so muß i ungeändert bleiben, wenn in (1) die Zeit t um T wächst, d. h. es muß

$$\omega T = 2\pi \tag{2}$$

der Periode der Sinusfunktion sein.

Statt der Periodendauer eines Wechselstromes wird in der Technik häufiger die Zahl ν der Perioden in der Sekunde benutzt; sie wird die Frequenz genannt und hängt mit der Periodendauer T durch die Gleichung zusammen:

$$\nu T = 1. \tag{3}$$

Am verbreitetsten ist in der Starkstromtechnik die Frequenz 50, Motoren für Bahnzwecke pflegen mit Wechselstrom der Frequenz 15 oder 25 betrieben zu werden; in der Telephonie hat man es mit höheren Frequenzen bis zu 5000 zu tun, in der drahtlosen Telegraphie mit Frequenzen von einigen Hunderttausend.

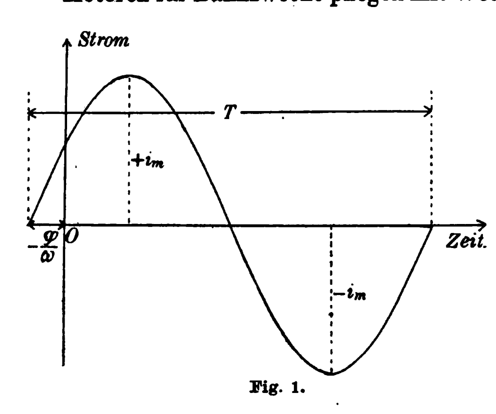


Fig. 1.

Die Konstante ω wird die Kreisfrequenz genannt; sie hat nach Gleichung (2) die Bedeutung

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \tag{4}$$

und ist gleich der konstanten Winkelgeschwindigkeit eines Vektors, der sich νmal in der Sekunde um einen Punkt dreht.

Durch die Konstante φ wird der Anfangspunkt der Zeit festgelegt; zur Zeit

$$t = -\frac{\varphi}{\omega} = -\frac{\varphi}{2\pi} \cdot T$$

wird nach Gleichung (1) der Strom Null, und zwar geht er dabei aus der negativen in die positive Richtung über (Fig. 1).

φ pflegt man die Werte von 0 bis 2π oder auch von $-\pi$ bis $+\pi$ zu geben; man spricht daher auch von positiven und negativen Phasenwinkeln.

Solange man es nur mit einem einzigen Strome zu tun hat, ist es gleichgültig, welchen Wert man der „Phase" φ erteilt; betrachtet man aber gleichzeitig zwei Ströme, so wird durch diese Konstante die gegenseitige Lage der beiden Stromkurven zueinander bestimmt. Hat z. B. der zweite Strom die Gleichung

$$i = i_m \sin \omega t, \tag{5}$$

so erreicht der Strom (1) offenbar um φ/ω Sekunden früher den Wert $i = 0$ als der Strom (5). Wir sagen, Strom (1) ist gegen Strom (5) in der Phase um den Winkel φ nach vorwärts verschoben; d. h. positive Winkel φ bedeuten eine Phasenverschiebung nach vorwärts, negative nach rückwärts.

2. Zwei charakteristische Eigenschaften einwelliger Ströme. Wir gehen dazu über, zwei wichtige und charakteristische Sätze für Sinusströme abzuleiten:

a) Die Summe von beliebig vielen Sinusströmen gleicher Frequenz ist wieder ein Sinusstrom der gleichen Frequenz.

Seien nämlich:

$$a = a_m \sin(\omega t + \alpha) \tag{1}$$

$$b = b_m \sin(\omega t + \beta) \tag{2}$$

zwei beliebige Sinusströme, so ist ihre Summe darstellbar durch

$$c = a + b = c_m \sin(\omega t + \gamma). \tag{3}$$

c_m und γ findet man folgendermaßen: da Gleichung (3) für jeden Zeitpunkt gültig ist, so können wir nacheinander setzen $\omega t = 0$ und $\frac{\pi}{2}$; das ergibt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} c_m \sin\gamma &= a_m \sin\alpha + b_m \sin\beta \\ c_m \cos\gamma &= a_m \cos\alpha + b_m \cos\beta \end{aligned} \tag{4}$$

und daraus durch Quadrieren und Addieren:

$$c_m^2 = a_m^2 + b_m^2 + 2\,a_m b_m \cos(\alpha - \beta) \tag{5}$$

und durch Division der beiden Gleichungen (4)

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a_m \sin\alpha + b_m \sin\beta}{a_m \cos\alpha + b_m \cos\beta}. \tag{6}$$

Beim Wurzelziehen in Gleichung (5) gibt man c_m am besten das positive Zeichen; γ ist dann folgendermaßen zu wählen:

Zähler und Nenner in (6) positiv, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$,

„ „ „ „ (6) negativ, $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$,

Zähler positiv, Nenner negativ $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$,

„ negativ, „ positiv $\frac{3\pi}{2} < \gamma < 2\pi$.

Da nun nach Gl. (3) die Summe zweier Sinusströme wieder ein Sinusstrom ist, so gilt dasselbe für die Summe beliebig vieler Sinusströme. Das hat physikalisch die Bedeutung, daß, wenn mehrere Leitungen, die von Sinusströmen durchflossen werden, sich in einem Knotenpunkt vereinigen, der resultierende Strom ebenfalls ein Sinusstrom sein muß oder, wenn ein Leiterkreis sich aus den Stücken $l_1, l_2, \dots l_n$ zusammensetzt und $v_1, v_2, \dots v_n$ die sinusförmigen Teilspannungen an diesen Stücken bedeuten, auch die Gesamtspannung $v = \sum_k v_k$ sinusförmig ist.

Wir geben eine wichtige Anwendung dieses Satzes. Wir setzen zur Abkürzung:

$$s(t) = i_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{7}$$

und bilden die Funktion:

$$\varphi(t) = s(t) + s\left(t + \frac{T}{n}\right) + s\left(t + \frac{2T}{n}\right) + \cdots + s\left(t + \frac{(n-1)T}{n}\right), \tag{8}$$

wo T die Periodendauer und n eine ganze Zahl sein soll, dann muß nach dem obigen Satze $\varphi(t)$ wiederum ein Sinusstrom von derselben Frequenz wie $s(t)$ sein, d. h. $\varphi(t) = p_m \sin(\omega t + \psi)$; setzt man aber in die Gleichung (8) $t + \frac{T}{n}$ an Stelle von T, so erhält man

$$\varphi\left(t + \frac{T}{n}\right) = s\left(t + \frac{T}{n}\right) + s\left(t + \frac{2T}{n}\right) + \cdots + s\left(t + \frac{(n-1)T}{n}\right) + s(t + T),$$

und da $s(t + T) = s(t)$ ist, so folgt:

$$\varphi\left(t + \frac{T}{n}\right) = \varphi(t), \tag{9}$$

danach müßte die Sinusfunktion $\varphi(t)$ die Periode T/n haben; das ist nicht möglich; also ist $p_m = 0$ und

$$\varphi(t) \equiv 0. \tag{10}$$

Dieser Satz ist wichtig für die Mehrphasenstromsysteme (vgl. S. 70ff.): Fließen in n Leitungen n Ströme von gleicher Amplitude, aber verschiedener Phase und zwar derartig, daß die Phasendifferenz zwischen zwei Strömen in zwei aufeinander folgenden Leitungen stets die gleiche T/n ist, so können sämtliche Leitungen in einem Knotenpunkt zusammenstoßen. Oder: denkt man sich ein aus Leiterstücken zusammengesetztes, geschlossenes nEck, so können

zwischen je zwei aufeinander folgenden Ecken Sinusspannungen von gleicher Größe bestehen, wenn die Phase zweier aufeinander folgender Spannungen immer um denselben Betrag T/n verschoben ist.

b) Der zweite für Sinusströme charakteristische Satz besteht darin, daß die Differentiation oder Integration eines Sinusstromes wiederum eine Sinusform ergibt. Denn aus:

$$i = i_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{11}$$

folgt:

$$\frac{di}{dt} = \omega i_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{12}$$

$$\int i\,dt = \frac{i_m}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \tag{13}$$

d. h. der Höchstwert von $\frac{di}{dt}$ wächst proportional mit der Frequenz des Stromes, der Höchstwert von $\int i\,dt$ nimmt umgekehrt proportional mit der Frequenz ab; die Phase von di/dt ist gegen diejenige von i um 90^0 nach vorwärts, die Phase von $\int i\,dt$ um 90^0 nach rückwärts verschoben.

Der zeitliche Differentialquotient und das Integral von Wechselströmen ist namentlich deswegen von Wichtigkeit, weil die physikalischen Eigenschaften von Spulen und von Kondensatoren auf diese Operationen führen.

Wir behandeln das einfache Beispiel, daß ein Sinusstrom $i = i_m \sin \omega t$ durch eine Spule vom Widerstand r und dem Selbstinduktionskoeffizienten L fließt; dann ist bekanntlich die Klemmenspannung v an den Enden der Spule gegeben durch die Gleichung

$$v = ir + L\frac{di}{dt}, \tag{14}$$

folglich ist:

$$v = i_m(r \sin \omega t + L\omega \cos \omega t) = v_m \sin(\omega t + \varphi). \tag{15}$$

Nach Gleichung (5) auf Seite 3 wird also der Höchstwert der Spannung

$$v_m = i_m\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2} \tag{16}$$

und der Phasenwinkel φ, um welchen die Spannung gegen den Strom nach vorwärts verschoben ist, wird nach Gleichung (6) (S. 3) berechnet aus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{r}. \tag{17}$$

3. Die Mittelwerte einwelliger Ströme. Bisher ist nur von Augenblickswerten und Höchstwerten der Ströme die Rede gewesen; nun bietet es ziemliche Schwierigkeiten, bei der Kürze der Periodendauer der technischen Wechselströme die einzelnen Augenblickswerte messend zu verfolgen; auch die Messung der Höchstwerte ist nicht einfach. In der Regel begnügt man sich damit, gewisse Mittelwerte zu messen, weil dies verhältnismäßig leicht ausführbar ist und für die meisten Zwecke der Praxis genügt.

Wir wollen daher zunächst eine allgemeine Definition der Mittelwerte geben. Sei $z = f(t)$ irgendeine periodische Funktion der Zeit, so teilen wir ausgehend von einer beliebigen Zeit t_1 eine Periode von der Dauer T in n gleiche Teile und nennen δt das so entstehende Zeitteilchen, so daß $n\delta t = T$ ist.

Wir bilden nunmehr den arithmetischen Mittelwert aller Werte z, welche zu diesen Teilpunkten gehören,

$$\frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$$

und gehen für unendlich groß werdendes n zur Grenze über; die so entstehende Größe nennen wir kurz den Mittelwert von z (genommen über eine Periodendauer) und bezeichnen ihn mit $M(z)$. Demnach ist also definitionsgemäß

$$M(z) = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} z\,dt. \tag{1}$$

Nun ist aber:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} = -\int_0^{t_1} + \int_0^T + \int_T^{t_1+T};$$

setzt man im letzten Integral $t + T$ an die Stelle von t, so wird es zu $\int_0^{t_1} f(t + T)\,dt$, und da $f(t + T) = f(t)$ ist, so fällt es gegen das erste weg, und wir erhalten

$$M(z) = \frac{1}{T}\int_0^T z\,dt,$$

d. h. die Größe des Mittelwertes ist von der Wahl des Anfangspunktes der Zeit bei der Integration unabhängig.

Bilden wir nun den Mittelwert über einen Sinusstrom

$$i = i_m \sin(\omega t + \alpha),$$

so ergibt eine einfache Integration

$$M(i) = 0. \tag{2}$$

Dieser Satz ist meßtechnisch von Wichtigkeit. Wird nämlich ein Wechselstrom durch ein Galvanometer (sei es Nadelgalvanometer, sei es Drehspulgalvanometer) geschickt, so ist in jedem Augenblick die Kraftwirkung auf das bewegliche System des Galvanometers proportional dem Produkt aus der Stromstärke i, welche das Galvanometer durchfließt, und einem konstanten Magnetfeld $\mathfrak{H}$. Wenn das bewegliche System zu träge ist, als daß es der rasch wechselnden Kraft $\mathfrak{H} i$ folgen kann, so ist die resultierende Ablenkung proportional dem Mittelwert von $\mathfrak{H} i$.

Da nun
$$M(\mathfrak{H} i) = \mathfrak{H} M(i) = 0$$
ist, so vermag ein Sinusstrom bei hinreichend hoher Frequenz desselben das bewegliche System eines Galvanometers nicht abzulenken.

Wir wollen andrerseits den Mittelwert über die Stromquadrate bilden. Es ist

$$i^2 = i_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} i_m^2 - \frac{1}{2} i_m^2 \cos 2(\omega t + \varphi).$$

Folglich, da der Mittelwert über das zweite Glied der rechten Seite verschwindet:

$$M(i^2) = \frac{1}{2} i_m^2. \tag{3}$$

Der quadratische Mittelwert ist von Bedeutung, weil er verhältnismäßig leicht der Messung zugänglich ist. Hitzdrahtapparate, Dynamometer und Elektrometer in idiostatischer Schaltung werden vom Quadrat des Stromes bzw. der Spannung beeinflußt. Man hat daher auch eine besondere Bezeichnung eingeführt:

$$J = \sqrt{M(i^2)}, \quad V = \sqrt{M(v^2)} \tag{4}$$

wird der Effektivwert[1]) des Stromes i und der Spannung v ge-

1) Um Effektivwerte und Augenblickswerte sofort äußerlich als solche zu kennzeichnen, werden Effektivwerte durchweg mit großen lateinischen, Augenblickswerte mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Höchstwerte sind auch Augenblickswerte und als solche durch kleine Buchstaben dargestellt.

nannt. Wird in der Praxis von der Wechselstromstärke oder Wechselspannung schlechtweg gesprochen, so ist in der Regel der Effektivwert gemeint. Ist r ein beliebiger Widerstand, so ist der Mittelwert der in demselben entwickelten Jouleschen Wärme

$$M(i^2 r) = J^2 r. \tag{5}$$

Man kann also sagen: ein Gleichstrom, welcher in einem Widerstande r dieselbe Wärme entwickelt wie ein Wechselstrom, ist seiner Größe nach gleich dem Effektivwert des Wechselstromes.

Wir wollen weiter den Mittelwert über zwei verschiedene Ströme der gleichen Frequenz bilden:

$$a = a_m \sin(\omega t + \alpha) \tag{6}$$

$$b = b_m \sin(\omega t + \beta), \tag{7}$$

folglich

$$ab = \frac{1}{2} a_m b_m (\cos(\alpha - \beta) - \cos(2\omega t + \alpha + \beta)),$$

und da der Mittelwert des zweiten Gliedes der rechten Seite verschwindet:

$$M(ab) = \frac{1}{2} a_m b_m \cos(\alpha - \beta). \tag{8}$$

Sind A und B die Effektivwerte von a und b, so wird nach (3)

$$M(ab) = AB \cos(\alpha - \beta). \tag{9}$$

Der Mittelwert $M(ab)$ ist von Interesse, weil er von $(\alpha - \beta)$ der Phasenverschiebung der beiden Ströme a und b abhängig ist. Sind a und b gleichphasig $(\alpha = \beta)$, so ist der Mittelwert

$$M(ab) = AB \tag{10}$$

seinem größten Wert, den er beim Verschieben der beiden Ströme a und b gegeneinander erhalten kann, nämlich gleich dem Produkt der beiden Effektivwerte. Beträgt dagegen die Phasenverschiebung 90^0, so ist

$$M(ab) = 0 \tag{11}$$

auch wenn A und B von Null verschieden sind.

Schickt man in einem Dynamometer den Strom a durch die feste, den Strom b durch die bewegliche Spule, so ist der Ausschlag proportional $M(ab)$. Man hat also auf diesem Wege die

Möglichkeit, durch Messung von $M(ab)$, von A und B die Phasenverschiebung zwischen a und b zu messen. Da aber

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$$

ist, so erhält man durch diese Methode nicht ohne weiteres auch das Zeichen des Phasenverschiebungswinkels, d. h. man weiß nicht, welcher der Ströme dem andern in der Phase nachfolgt.[1])

Die Formel (9) ist auch brauchbar, um daraus die Messung einer Wechselstromleistung abzuleiten; bedeutet nämlich a eine Wechselspannung, b den von dieser Spannung in einem Leitergebilde erzeugten Wechselstrom, so ist ab der Augenblickswert der Leistung. Von praktischem Interesse ist nur der zeitliche Mittelwert der Leistung, der durch Gleichung (9) gegeben ist und z. B. durch ein dynamometrisches oder elektrometrisches Wattmeter angezeigt wird. Man gelangt also zu dem wichtigen Ergebnis, daß ein Wechselstrom im Mittel keine Arbeit leistet, obwohl Effektivwerte von Strom und Spannung von Null verschieden sind, sobald die Phasenverschiebung von Strom und Spannung 90^0 beträgt (Gl. 11). Sind sie dagegen in Phase ($\alpha = \beta$), so ist die mittlere Leistung gleich dem Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung (Gl. 10). Letzterer Fall ist praktisch herstellbar, indem eine Spannung durch einen induktionslosen Widerstand geschlossen wird.

Wir wollen noch den Mittelwert über das Produkt von zwei Sinusströmen von verschieden großer Frequenz betrachten.

Seien

$$a = a_m \sin(\omega_1 t + \alpha) \tag{12}$$

$$b = b_m \sin(\omega_2 t + \beta) \tag{13}$$

die Ströme, wo also

$$\omega_1 = 2\pi/T_1, \quad \omega_2 = 2\pi/T_2$$

zu setzen ist.

Von einem Mittelwert von ab kann dann, streng genommen, immer nur die Rede sein, wenn die Schwingungsdauern der beiden Ströme kommensurabel sind, wenn sich also zwei ganze Zahlen k_1, k_2 so finden lassen, daß k_1 Perioden des Stromes a ebenso lange dauern als k_2 Perioden des Stromes b.

1) Erst durch gewisse Kunstgriffe wird eine Entscheidung darüber möglich.

Setzt man:

$$T = k_1 T_1 = k_2 T_2,$$

so ist also der Mittelwert von ab über T Sekunden zu bilden, d. i. die kleinste gemeinschaftliche Periode von (12) und (13).

Wird wieder $\omega = 2\pi/T$ gesetzt, so ist also

$$\omega_1 = k_1 \omega, \quad \omega_2 = k_2 \omega.$$

Mit einer für die Praxis genügend großen Genauigkeit lassen sich natürlich stets zwei solche Zahlen k_1, k_2 angeben. Nun ist:

$$(14) \qquad \begin{aligned} ab = \frac{1}{2} a_m b_m [&\cos((k_1 - k_2)\omega t + \alpha - \beta) \\ &- \cos((k_1 + k_2)\omega t + \alpha + \beta)], \end{aligned}$$

folglich der Mittelwert über die Periodendauer T

$$(15) \qquad M_T(ab) = 0.$$

Daraus ergibt sich also, daß, wenn die Sinusströme in der festen und beweglichen Spule eines Dynamometers verschiedene Frequenz haben, eine Ablenkung nicht zustande kommen kann.

Dieser Satz kann eine scheinbare Ausnahme erfahren. Wie nämlich die Formel (14) zeigt, besteht ab aus zwei übereinandergelagerten Wellen, von denen die eine die Schwingungsdauer $T_1 T_2/(T_2 - T_1)$, die andere die Schwingungsdauer $T_1 T_2/(T_2 + T_1)$ hat. Wenn nun T_1 und T_2 sich nur sehr wenig voneinander unterscheiden, so kann die Schwingungsdauer der ersten dieser beiden Sinuswellen so groß werden, daß das Dynamometer nicht mehr den Mittelwert anzeigt, sondern den Augenblickswerten dieser Welle folgt. Die Skale des Dynamometers mag zu beiden Seiten des Nullstriches geteilt sein, so daß es nach beiden Seiten ausschlagen kann, dann wird sich der Zeiger zwischen zwei symmetrisch zum Nullstrich liegenden Endstellungen allmählich hin- und herbewegen.

Man kann diese Erscheinung benutzen, um die Phasenverschiebung zwischen zwei Strömen gleicher Frequenz zu messen. Seien

$$a = a_m \sin(\omega_1 t + \alpha), \quad a' = a_m' \sin(\omega_1 t + \alpha')$$

diese Ströme; wir schalten in jeden der Ströme a und a' die Hauptstromspulen je eines Wattmeters Q und Q' (Fig. 2) und

schicken durch die hintereinander geschalteten Spannungsspulen aus einer Hilfsenergiequelle M einen Wechselstrom

$$b = b_m \sin(\omega_2 t + \beta),$$

dessen Frequenz nur sehr wenig von derjenigen von a und a' abweicht, im übrigen aber beliebig ist. Dann sind die Zeigerbewegungen der beiden Wattmeter proportional:

$$\cos((\omega_1 - \omega_2)t + \alpha - \beta) \text{ bzw. } \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \alpha' - \beta).$$

Wir beobachten mit einer Stoppuhr die Zeit τ_1, um die der Zeiger des Wattmeters Q' später in derselben Richtung durch den Nullpunkt geht als derjenige des Wattmeters Q, so ist offenbar

$$\tau_1 = \frac{\alpha - \alpha'}{\omega_1 - \omega_2}.$$

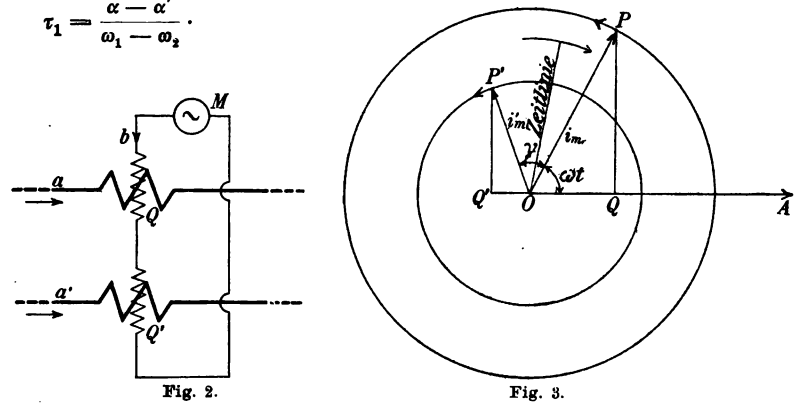


Fig. 2. Fig. 3.

Weiter beobachtet man die Zeit τ_0, die zwischen zwei Durchgängen durch die Nullstellung bei einem und demselben Wattmeter vergeht, so ist: $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$, folglich

$$\alpha - \alpha' = 2\pi \frac{\tau_1}{\tau_0}. \qquad (16)$$

Diese Methode, eine Phasenverschiebung zu messen, gibt im Gegensatz zu der früher besprochenen nicht nur die Größe, sondern auch das Zeichen der Phasenverschiebung.[1])

4. Die geometrische Darstellung einwelliger Ströme. Denkt man sich eine Strecke $OP = i_m$ (Fig. 3) um den Punkt O

1) Man muß dabei allerdings die Klemmen der Wattmeter richtig anschließen; ferner muß bekannt sein, welche der Frequenzen ω_1 und ω_2 die größere ist; in obigem Beispiel ist $\omega_1 > \omega_2$ angenommen.

mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierend, so ist die von P auf die Anfangslage OA des rotierenden Radius gefällte Senkrechte

$$(1) \qquad PQ = i_m \sin \omega t .$$

Rotiert eine zweite Linie $OP' = i_m'$ mit der gleichen Geschwindigkeit, so bildet sie mit OP einen konstanten Winkel γ und die Senkrechte von P' auf OA wird:

$$(2) \qquad P'Q' = i_m' \sin(\omega t + \gamma) .$$

Man kann somit die beiden unter dem Winkel γ sich schneidenden Graden OP und OP' als die Repräsentanten zweier Ströme ansehen, welche durch die Gleichungen (1) und (2) gegeben sind.

Anstatt nun den Winkel $P'OP$ rotieren zu lassen, können wir ihn uns auch ruhend und eine Zeitlinie im entgegengesetzten Sinne sich drehend denken. Die Drehungsrichtung der Zeitlinie wird gebraucht, um die Phasenfolge der Vektoren zu charakterisieren. In der Fig. 3 erkennt man aus der Pfeilrichtung für die Zeitlinie sofort, daß i_m' gegen i_m in der Phase nach vorwärts verschoben ist (Phasenwinkel γ positiv). Für die Praxis ist es nun bequem, statt der Höchstwerte die Effektivwerte zu verwenden, weil diese gemessen werden; man hat also sämtliche Vektoren im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ zu verkleinern.

Bei den geometrischen Darstellungen von Strömen und Stromsystemen kommt es nur auf die Länge der Vektoren an, welche die Effektivwerte angeben, und die Winkel, welche sie miteinander bilden; deshalb kann man in jedem Diagramm jeden Vektor parallel mit sich selbst verschieben, oder anders ausgedrückt: es ist gleichgültig, von welchen Punkten aus wir die Vektoren ziehen.

Die folgenden, häufig gebrauchten Sätze sind leicht einzusehen:[1])

Die Summe zweier Ströme $i_1 + i_2 = i_3$ wird im Diagramm durch die Diagonale des Parallelogrammes aus i_1 und i_2 dargestellt. Die Summe aus beliebig vielen Strömen wird also ebenso gebildet, wie man die Resultierende aus beliebig vielen Kräften konstruiert.

Wendet man diesen Satz z. B. auf n Ströme gleicher Größe an, von denen zwei aufeinanderfolgende stets um denselben Betrag T/n verschoben sind, so erkennt man leicht die Richtigkeit

1) Vgl. auch E. Jahnke, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Leipzig, 1905. B. G. Teubner. S. 68—74.

des oben bewiesenen Satzes (Gl. 10 S. 4), daß die Summe aller dieser Ströme Null ist. Das Diagramm der Ströme wird nämlich durch ein geschlossenes reguläres n-Eck gebildet.

Der Vektor, welcher den Differenzialquotienten eines Stromes $\frac{di}{dt}$ darstellt, wird gefunden, indem man den Stromvektor um 90^0 nach vorwärts verschiebt und im Verhältnis $\omega : 1$ vergrößert.

Das Zeitintegral über einen Strom $\int i dt$ wird dargestellt durch einen um 90^0 zurückgedrehten Vektor, der im Verhältnis $1 : \omega$ geteilt ist (vgl. S. 5).

Beispiel 1: Eine Spannung v wird durch eine Spule vom Widerstand r und der Induktivität L geschlossen. Ist i der zustande kommende Strom, so ist: $v = ir + L\frac{di}{dt}$. Also setzt sich ein Vektor von der Größe Jr (Fig. 4) und ein zweiter von der Größe $J\omega L$, der um 90^0 gegen Jr nach vorwärts verschoben ist, zur Resultierenden V zusammen. In die Richtung von Jr fällt auch der Stromvektor selber.

Fig. 4.

Für den Phasenwinkel φ zwischen V und J folgt aus der Figur

$$tg\varphi = J\omega L/Jr = \omega L/r, \tag{3}$$

und zwar ist der Strom gegen die Spannung um den Winkel φ verzögert. Weiter ist:

$$V^2 = J^2(r^2 + \omega^2 L^2). \tag{4}$$

Beispiel 2: Der Lufttransformator.[1])

Eine Selbstinduktionsspule vom Widerstand r_1 und der Induktivität L_1 induziere auf eine zweite Spule, die durch einen Widerstand geschlossen sei. Sei M die Gegeninduktivität, r_2 und L_2 Widerstand und Selbstinduktion des sekundären Kreises, so gelten bekanntlich folgende Gleichungen:

$$v = i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \tag{5}$$

$$0 = i_2 r_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \tag{6}$$

1) Eine eingehendere Darstellung des Transformatorendiagrammes s. bei F. Emde. Die Arbeitsweise der Wechselstrommaschinen. J. Springer. Berlin 1902.

(v Spannung an der primären Spule, i_1 primärer Strom, i_2 sekundärer Strom).

Um dieses System graphisch darzustellen, gehen wir von Gleichung (6) aus. Man macht OA (Fig. 5) $= J_2 r_2$ und trägt auf einer Senkrechten in positiver Drehrichtung $OB = J_2 \omega L_2$ ab; die Resultierende OC aus OA und OB ist dann nach Gleichung (6) $- J_1 \omega M$. Dreht man den Vektor OC um 90^0 nach vorwärts, so kommt man in die Richtung, in der J_1 dargestellt werden muß. Man trägt daher in dieser Richtung $OD = J_1 r_1$ und in einer, die um 90^0 gegen OD nach vorwärts verschoben ist, $OE = J_1 \omega L_1$ auf. Die Resultierende OF aus OD und OE ist nach Gleichung (5) mit $FG = J_2 \omega M$ zusammenzusetzen zu $OG = V$. Dabei muß FG senkrecht auf OA stehen, d. h. parallel zu OB verlaufen.

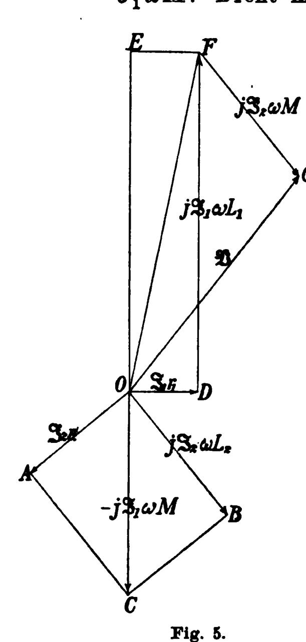


Fig. 5.

Wäre keine sekundäre Spule vorhanden, so wäre OF die Betriebsspannung V, $\sphericalangle FOD$ die Phasenverschiebung zwischen V und J_1; durch Hinzufügen der sekundären Spule wird dieser Winkel auf GOD verkleinert.

In dem auch praktisch wichtigen Fall, daß man r_1 vernachlässigen kann, wird das Diagramm wesentlich vereinfacht. Wir verschieben in diesem Fall das Dreieck OBC parallel mit sich selbst in den Punkt F und nehmen weiter die folgenden Veränderungen vor.

a) Wir drehen den Vektor V um 90^0 nach vorwärts; das hat zur Folge, daß nicht mehr die Richtungen von OD und OA (Fig. 5), sondern die von CO und OB die Phasen von J_1 und J_2 darstellen.

b) Wir verkleinern alle die Ströme J_1 und J_2 enthaltenden Vektoren im Verhältnis $1 : \omega L_1$.

Auf diese Weise entsteht die Figur 6, in welcher

$$OF = J_1 \qquad FG = J_2 \frac{M}{L_1} \qquad GO = \frac{V}{\omega L_1}$$

$$FC = J_1 \frac{M}{L_1} \qquad FB = J_2 \frac{L_2}{L_1}$$

sind. OF und FG sind die Phasenrichtungen von J_1 und J_2, eine Senkrechte zu OH (d. h. Richtung FF') diejenige von V.

Wir ziehen FH und GG' parallel zu BC, dann ist:

$$FG' : FC = FG : FB \text{ oder}$$

$$FG' = J_1 \frac{M^2}{L_1 L_2} \quad \text{und} \quad G'O = J_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right).$$

Man bezeichnet

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \tag{7}$$

als den Streukoeffizienten. Also ist:

$$FG' = J_1(1 - \sigma) \qquad G'O = J_1 \sigma.$$

Ferner

$$HG : GO = FG' : G'O \text{ oder}$$

$$HG = \frac{V}{\omega L_1} \frac{1 - \sigma}{\sigma} \text{ und } OH = \frac{V}{\omega L_1} \frac{1}{\sigma}.$$

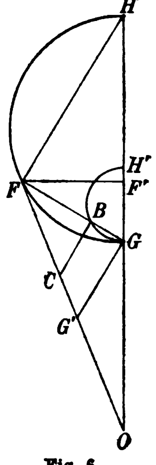


Fig. 6.

Läßt man die Primärspannung V und die Induktionskoeffizienten $L_1 L_2$ und M, folglich auch σ konstant, während man r_2 allmählich ändert, so bleiben auch OG und OH konstant, d. h. der Punkt F bewegt sich in einem Halbkreis über GH. Zieht man noch $FF' \perp OH$, so ist $\sphericalangle OFF'$ der Phasenwinkel zwischen V und J_1, $\sphericalangle GFF'$ derjenige zwischen V und J_2. Läßt man r_2 von ∞ auf Null ab nehmen, so wandert F auf dem Halbkreis von G bis H.

OG wird der Primärstrom J_0 bei geöffnetem Sekundärstrom, d. h.

$$J_0 = V/\omega L_1, \tag{8}$$

OH der Kurzschlußstrom J_k, d. h. der primäre Strom bei vollkommen kurzgeschlossenem Sekundärkreis. Folglich ist:

$$J_k = \frac{V}{\omega L_1} \frac{1}{\sigma} = \frac{J_0}{\sigma}. \tag{9}$$

Aus Gl. (8) und (9) ergibt sich die Wichtigkeit des sog. Leerlaufs- und Kurzschlußversuches für die Messung der Streuung.

5. Die symbolische Darstellung einwelliger Ströme. Die Darstellung von Wechselstromgrößen durch Diagramme läßt sich auch in ein analytisches Gewand kleiden. Wir wollen Vektoren, wie üblich, durch große deutsche Buchstaben bezeichnen

und untersuchen, nach welchen Regeln man mit derartig bezeichneten Vektoren zu **rechnen** hat.[1]) Sei also $\mathfrak{J}$ der Vektor, welcher den Strom vom Effektivwert J darstellt. Wir führen folgende neue Bezeichnungsweise ein: Wird der Vektor $\mathfrak{J}$ um 90^0 nach vorwärts gedreht, so sei er durch $j\mathfrak{J}$ bezeichnet, wo also j ein Operationszeichen bedeutet, das eine Drehung um 90^0 nach **vorwärts** andeutet. Nach einer weiteren Drehung um 90^0 ist danach der so entstehende Vektor mit $j(j\mathfrak{J})$ zu bezeichnen; dieser Vektor ist aber auch mit $-\mathfrak{J}$ zu bezeichnen, da er in die entgegengesetzte Richtung von $\mathfrak{J}$ fällt. Wenn man nun das Operationszeichen j wie einen Faktor behandelt, dann muß man setzen:

$$(1) \qquad j^2 = -1 \qquad j = \sqrt{-1}.$$

Durch diese Festsetzungen wird es möglich, jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{V}$ durch einen anderen $\mathfrak{J}$ analytisch auszudrücken. Dazu verschiebt man beide parallel sich selbst in denselben Anfangspunkt und projiziert $\mathfrak{V}$ auf die beiden Vektoren $\mathfrak{J}$ und $j\mathfrak{J}$ (Fig. 7).

Fig. 7.

Sind die Projektionen OA und OB a bzw. b mal so lang als der Effektivwert von $\mathfrak{J}$, wo also a und b reelle Zahlen bedeuten, so ist Vektor OA mit $a\mathfrak{J}$, Vektor OB mit $bj\mathfrak{J}$ zu bezeichnen, und

$$(2) \qquad \mathfrak{V} = a\mathfrak{J} + bj\mathfrak{J} = (a + bj)\mathfrak{J}.$$

D. h., ein Vektor $\mathfrak{V}$ entsteht aus einem andern $\mathfrak{J}$ durch Multiplizieren mit einer komplexen Zahl. Die Komponenten a und b der komplexen Zahl sind für die Berechnung der Effektivwerte und der Phasenverschiebung φ zwischen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{J}$ wichtig. Es ist (Fig. 7):

$$OC^2 = OA^2 + OB^2,$$

und da die Längen der Vektoren den Effektivwerten gleich sind:

$$(3) \qquad V^2 = (a^2 + b^2)J^2;$$

ferner:

$$(4) \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{OB}{OA} = \frac{bJ}{aJ} = \frac{b}{a}.$$

1) Vgl. hierzu auch E. Jahnke, a. a. O.

Aus (2) und (4) ergibt sich folgende praktische Regel für die Berechnung der Phasenverschiebung zwischen zwei Vektoren: man bilde den Quotienten $\mathfrak{V}/\mathfrak{J}$ und zerlege diesen in den reellen Teil a und den rein imaginären bj, dann berechnet man die Phasenverschiebung aus Gleichung (4).

Setzt man:

$$r^2 = a^2 + b^2, \tag{5}$$

so wird die Länge

$$OC = \sqrt{a^2 J^2 + b^2 J^2} = rJ = V; \tag{6}$$

$$\text{ferner } \cos\varphi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r}, \text{ also}$$

$$a + bj = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = re^{\varphi j} \tag{7}$$

und

$$\mathfrak{V} = (a + bj)\mathfrak{J} = r\mathfrak{J}e^{\varphi j}. \tag{8}$$

Der Vektor $r\mathfrak{J}e^{\varphi j}$ wird also aus Vektor $\mathfrak{J}$ dadurch abgeleitet, daß man letzteren auf die $r$fache Länge bringt und um den Winkel φ nach vorwärts dreht.

Es soll nunmehr untersucht werden, wie groß der Differentialquotient eines Vektors nach der Zeit wird. In der Zeit dt dreht sich ein Vektor $\mathfrak{J}_t$ (Fig. 8) um den Winkel ωdt und gelangt dadurch in die Lage $\mathfrak{J}_{t+dt}$. Folglich ist nach den Regeln der Vektoraddition

Fig. 8.

$$\mathfrak{J}_{t+dt} = \mathfrak{J}_t + (\text{Vektor } AB).$$

Nun ist die Länge von AB gleich $J\omega dt$, und da er auf $\mathfrak{J}_t$ senkrecht steht, so ist zu setzen

$$\text{Vektor } AB = j\omega\mathfrak{J}dt.$$

Daraus ergibt sich der Satz:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \omega j\mathfrak{J} \tag{9}$$

und durch Umkehrung

$$\int \mathfrak{J}\,dt = \frac{\mathfrak{J}}{\omega j} = -\frac{j\mathfrak{J}}{\omega}. \tag{10}$$

Dieser Satz ist deshalb wichtig, weil durch ihn in

den Differentialgleichungen die Differentialquotienten nach der Zeit verschwinden.

Wir wollen ihn zunächst auf einen Kondensator und eine Induktionsspule anwenden. Der Ladestrom $\mathfrak{J}$ eines Kondensators von der Kapazität C ist, wenn $\mathfrak{V}$ die Kondensatorspannung ist:

$$\mathfrak{J} = C\frac{d\mathfrak{V}}{dt} \qquad \text{oder nach (9)}$$

$$\mathfrak{J} = j\omega C\mathfrak{V}. \tag{11}$$

Andrerseits gilt für eine Selbstinduktionsspule, welche von der Spannung $\mathfrak{V}$ erregt wird und vom Strom $\mathfrak{J}$ durchflossen wird, die Gleichung:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{J}r + L\frac{d\mathfrak{J}}{dt} \qquad \text{oder nach (9)}$$

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{J}(r + j\omega L). \tag{12}$$

Man sieht, durch Anwendung der symbolischen Methode erhalten die beiden Gleichungen (11) und (12) die Form des Ohmschen Gesetzes.[1] An die Stelle des Widerstandes tritt in der ersten Gleichung die Größe $1/j\omega C$, in der zweiten $r + j\omega L$.

Diese Größen werden allgemein *Widerstandsoperatoren* genannt. Man gelangt also zu folgenden Regeln über die Rechnung mit der symbolischen Methode:

Der Quotient aus Spannung und Strom in symbolischer Darstellung ist eine komplexe Größe und wird *Widerstandsoperator* genannt.

Der Widerstandsoperator eines induktionsfreien Ohmischen Widerstandes ist gleich dem Widerstand selbst;

der Widerstandsoperator einer Selbstinduktion L ist $j\omega L$;

der Widerstandsoperator einer Kapazität C ist $1/j\omega C = -j/\omega C$.

Daraus ergibt sich weiter:

Haben die in Reihe geschalteten Teile eines Stromkreises die Operatoren $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n$, so ist der Operator des Gesamtkreises $\Sigma\mathfrak{z}_k$.

Sind n Zweige, deren Operatoren gleich $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n$ sind, einander parallel geschaltet, so wird der Widerstandsoperator $\mathfrak{z}$ der Gesamtverzweigung aus der Gleichung

$$\frac{1}{\mathfrak{z}} = \sum \frac{1}{\mathfrak{z}_k}$$

berechnet.

---

1) Vgl. E. Jahnke a. a. O. S. 68—71.

Als Anwendung wählen wir wiederum den Transformator. Die Gleichungen (5) und (6) auf S. 13 in symbolischer Form geschrieben, ergeben

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{J}_1(r_1 + j\omega L_1) + \mathfrak{J}_2 j\omega M, \tag{13}$$

$$0 = \mathfrak{J}_2(r_2 + j\omega L_2) + \mathfrak{J}_1 j\omega M. \tag{14}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort Phasenverschiebung δ und Stärkeverhältnis von primärem und sekundärem Strom.

Es ist nämlich

$$-\frac{\mathfrak{J}_1}{\mathfrak{J}_2} = \frac{r_2 + j\omega L_2}{j\omega M} = \frac{L_2}{M} - j\frac{r_2}{\omega M},$$

folglich

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{r_2}{\omega M} : \frac{L_2}{M} = -\frac{r_2}{\omega L_2} \tag{15}$$

und

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 L_2^2}}{\omega M}. \tag{16}$$

Eliminiert man $\mathfrak{J}_2$ aus (13) und (14), so ergibt sich, wenn man setzt

$$\frac{\omega^2 M^2}{r_2^2 + \omega^2 L_2^2} = N^2,$$

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{J}_1(r_1 + r_2 N^2 + j\omega(L_1 - L_2 N^2)),$$

d. h. der sekundäre Kreis hat dieselbe Wirkung, als wenn der Widerstand der primären Spule um $r_2 N^2$ vergrößert und ihre Selbstinduktion um $L_2 N^2$ verkleinert worden wäre. Von besonderem Interesse ist der praktisch wichtige Fall, daß man den primären Widerstand vernachlässigen kann. Wir setzen also

$$r_1 = 0.$$

Berechnet man $\mathfrak{J}_2$ aus (14) und setzt es in (13) ein, so folgt

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{J}_1\left(j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_2 + j\omega L_2}\right).$$

Bringt man die Klammer auf einen Nenner und setzt nach Gleichung (7) auf S. 15

$$M^2 = L_1 L_2(1 - \sigma),$$

so folgt:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{J}_1 \frac{j\omega L_1(r_2 + j\omega L_2\sigma)}{r_2 + j\omega L_2} \tag{17}$$

und für die Effektivwerte:

$$V^2 = J_1^2 \omega^2 L_1^2 \frac{r_2^2 + \omega^2 L_2^2 \sigma^2}{r_2^2 + \omega^2 L_2^2}. \tag{18}$$

Ist der sekundäre Stromkreis geöffnet, d. h. $r_2 = \infty$, so sei der primäre Strom J_0 (Leerlaufstrom); folglich

$$J_0 = \frac{V}{\omega L_1}.$$

Denken wir uns andrerseits den sekundären Kreis vollkommen kurzgeschlossen, d. h. $r_2 = 0$, so wird der dem Kurzschluß entsprechende Primärstrom J_k nach (18)

$$J_k = \frac{V}{\omega L_1 \sigma},$$

daher wie in Gleichung (9) des § 4:

$$\sigma = \frac{J_0}{J_k}.$$

Der Resonanztransformator.[1]) Wird eine Spule vom Widerstand r und der Selbstinduktion L mit einem Kondensator von der Kapazität C in Reihe geschaltet, so ist der Widerstandsoperator dieser Kombination:

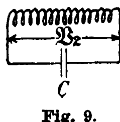


Fig. 9.

$$r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + j\omega\left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right).$$

Sie verhält sich also genau so, als ob die Selbstinduktion auf $\lambda = L - \frac{1}{\omega^2 C}$ verringert worden wäre. Wird

$$\omega^2 L C = 1, \tag{20}$$

so ist $\lambda = 0$; die Kombination verhält sich wie ein reiner Widerstand; man pflegt in diesem Fall von Resonanz zu sprechen.

Schaltet man in den sekundären Kreis eines Transformators die Kapazität C ein (Fig. 9), so gelten nach dem Gesagten für diesen wiederum die Gleichungen (13) und (14) mit der Maßgabe, daß an Stelle von L_2 zu setzen ist:

$$\lambda_2 = L_2 - \frac{1}{\omega^2 C}. \tag{21}$$

1) s. Russell, alternating currents. **2**, 235 Cambridge, 1906. Seibt, ETZ. 1904, S. 276. Benischke, ETZ. 1907, S. 25.

Außerdem ist von praktischem Interesse die Größe der Spannung am Kondensator, die aus

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{J}_2/j\omega C \tag{22}$$

berechnet wird. Auch alle aus (13) und (14) abgeleiteten Gleichungen bleiben, abgesehen von der Veränderung von L_2 in λ_2, genau bestehen.

Der Streukoeffizient wird scheinbar ein anderer, nämlich

$$\sigma' = 1 - \frac{M^2}{L_1 \lambda_2} = 1 - \frac{M^2}{L_1\left(L_2 - \frac{1}{\omega^2 C}\right)},$$

und wenn man wieder nach Gleichung (7) auf S. 5 den wirklichen Streukoeffizient σ einführt,

$$\sigma' = \frac{\sigma - \frac{1}{\omega^2 L_2 C}}{1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C}}. \tag{23}$$

Obgleich sich nun an den einzelnen Gleichungen für den Transformator formell nichts ändert, treten doch beim sog. Resonanztransformator Besonderheiten auf. Dies erkennt man am leichtesten aus der Gleichung (23). Während nämlich der wahre Streukoeffizient σ nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, erkennt man aus (23), daß σ' jeden beliebigen positiven oder negativen Wert erhalten kann. Der Wert von σ' bestimmt aber, wie wir bereits wissen, die Lage des Kreisdiagrammes. Wir erhalten also am einfachsten einen allgemeinen Überblick über die Arbeitsweise des Resonanztransformators, wenn man für die verschiedenen möglichen Werte von σ' die Kreisdiagramme zeichnet. In der folgenden Tabelle sind die verschiedenen Möglichkeiten zusammengestellt.

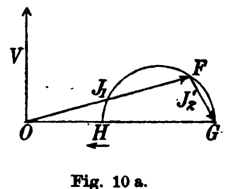


Fig. 10 a.

Fig. 10 b.

Fig. 6

C	σ'	$OH = J'_k = J_0/\sigma'$	Durchmesser GH	
0 bis $1/L_2\omega^2$	1 bis $+\infty$	J_0 bis 0	0 bis $-J_0$	Fig. 10 a u. b.
$1/L_2\omega^2$ bis $1/L_2\omega^2\sigma$	$-\infty$ bis 0	0 bis $-\infty$	$-J_0$ bis $-\infty$	Fig. 10 b, c, d.
$1/L_2\omega^2\sigma$ bis ∞	0 bis σ	$+\infty$ bis J_0/σ	$+\infty$ bis $J_0(1-\sigma)/\sigma$	Fig. 10 d u. e.

Besonderes Interesse verdienen die in Fig. 10c und d dargestellten Fälle. In Fig. 10c ist $\sigma' = -1$. Verändert man in diesem Falle r_2 von ∞ bis 0, so bleibt die Stärke des primären Stromes konstant, nur seine Phase ändert sich. Man könnte daher diese Anordnung bei Eichungen von Apparaten zum Verschieben

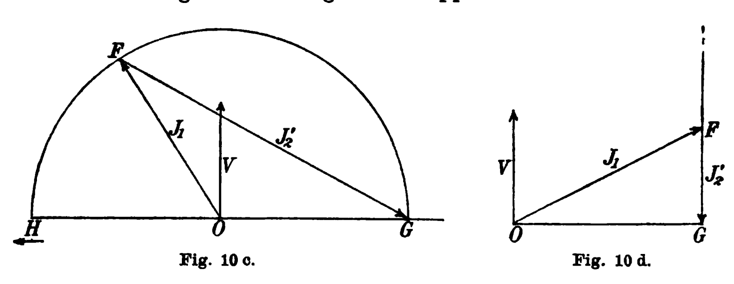


Fig. 10 c. Fig. 10 d.

der Stromphase benutzen. Daß für $\sigma' = -1$ die Stromstärke J_1 von der Größe der sekundären Belastung unabhängig wird, folgt auch aus Gleichung (18); es ist:

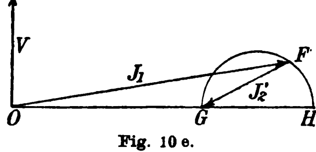


Fig. 10 e.

$$V = J_1 \omega L_1. \quad (\sigma' = -1)$$

Fig. 10d ist von Interesse, weil sie die eigentliche Resonanzlage des Transformators enthält; für $r_2 = 0$ wird J_2 und damit V_2 unendlich groß. Praktisch tritt das natürlich nicht ein, weil r_1 und r_2 stets von Null verschiedene Werte haben.

6. Die Mittelwerte bei der symbolischen Darstellung. Zwischen Strömen und Spannungen in einem Stromsystem bestehen Gleichungen, welche sich aus den Strömen und Spannungen und ihren Differentialquotienten homogen und linear zusammensetzen. Wendet man die symbolische Darstellung an, so erhält man daher homogene und lineare Gleichungen aus Spannungen $\mathfrak{V}$ und Strömen $\mathfrak{J}$, deren Koeffizienten komplexe Zahlen sind. Daraus berechnet man für jeden Vektorquotienten aus $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{J}$ Ausdrücke, die sich lediglich aus komplexen Zahlen mehr oder weniger kompliziert zusammensetzen; diese Ausdrücke werden, wie wir sahen, nach den gewöhnlichen für komplexe Zahlen geltenden Regeln ausgerechnet.

Produkte von Vektoren treten hier nicht auf; mit Vektor-

produkten hat man es erst zu tun bei Berechnung von Effektivwerten, Leistungen usw. Man hat also bei der symbolischen Darstellung zu unterscheiden zwischen Produkten aus komplexen Zahlen und eigentlichen Vektorprodukten. Wie die letzteren zu berechnen sind, soll nunmehr untersucht werden.

Es wird die Frage aufgeworfen, wie man unter Anwendung der symbolischen Methode den Mittelwert aus dem Produkt zweier Sinusströme zu berechnen hat. Dieser Mittelwert ist von der Zeit unabhängig, ist also kein Vektor mehr, sondern ein Skalar. Wir wollen ihn bezeichnen mit:

$$(\mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2) = M(i_1\, i_2) = J_1 J_2 \cos\varphi, \tag{1}$$

wenn φ die Phasenverschiebung der beiden Ströme ist und J_1, J_2 ihre Effektivwerte sind. $(\mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2)$ bedeutet also im Sinne der Vektorenrechnung das sog. „innere Produkt“, und die rechte Seite der Gleichung (1) gibt die Definition, wie es zu berechnen ist.

Aus der durch Gleichung (1) gegebenen Definition ergeben sich unmittelbar die drei Rechnungsregeln:

$$1) \quad (\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}) = J^2, \tag{2}$$

$$2) \quad (\mathfrak{J} \times j\mathfrak{J}) = 0, \tag{3}$$

denn die Phasenverschiebung zwischen $\mathfrak{J}$ und $j\mathfrak{J}$ ist 90^0,

$$3) \quad (j\mathfrak{J} \times j\mathfrak{J}) = J^2, \tag{4}$$

denn die beiden Faktoren dieses Produktes sind gleichphasig und von gleicher absoluter Größe.

Liegt der Vektor $\mathfrak{J}_2$ in der Phase um den Winkel φ vor $\mathfrak{J}_1$, so bilden die Vektoren $\mathfrak{J}_2$ und $j\mathfrak{J}_1$ den Winkel $(90-\varphi)^0$. Daher ist:

$$(j\mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2) = J_1 J_2 \sin\varphi. \tag{5}$$

Andrerseits bilden $\mathfrak{J}_1$ und $j\mathfrak{J}_2$ den Winkel $(90+\varphi)^0$ miteinander, daher ist:

$$(\mathfrak{J}_1 \times j\mathfrak{J}_2) = -J_1 J_2 \sin\varphi.$$

Das ergibt die weitere Rechenregel

$$(\mathfrak{J}_1 \times j\mathfrak{J}_2) = -(j\mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2). \tag{6}$$

Aus (1) und (5) ergibt sich:

$$(\mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2)^2 + (j\mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2)^2 = J_1^2 J_2^2. \tag{7}$$

Häufiger ist ein Produkt der Form $(\mathfrak{z}_1 \mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{z}_2 \mathfrak{J}_2)$ zu bilden, wo

$$\mathfrak{z}_1 = a_1 + b_1 j, \qquad \mathfrak{z}_2 = a_2 + b_2 j$$

komplex sind. Es ergibt sich nach den bisherigen Regeln:

$$((a_1 \mathfrak{J}_1 + b_1 j \mathfrak{J}_1) \times (a_2 \mathfrak{J}_2 + b_2 j \mathfrak{J}_2)) =$$
$$= (a_1 a_2 + b_1 b_2)(\mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)(j \mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2).$$

Nun ist aber, wenn man die $\mathfrak{z}$ ebenfalls wie Vektoren behandelt:

$$(\mathfrak{z}_1 \times \mathfrak{z}_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2, \quad (\mathfrak{z}_1 \times j \mathfrak{z}_2) = -a_1 b_2 + b_1 a_2.$$

Folglich:

$$(8) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{z}_1 \mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{z}_2 \mathfrak{J}_2) &= (\mathfrak{z}_1 \times \mathfrak{z}_2)(\mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2) + (\mathfrak{z}_1 \times j \mathfrak{z}_2)(j \mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2) \\ &= (\mathfrak{z}_1 \times \mathfrak{z}_2)(\mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2) + (j \mathfrak{z}_1 \times \mathfrak{z}_2)(\mathfrak{J}_1 \times j \mathfrak{J}_2). \end{aligned}$$

Beispiel. Es ist das auf ein Dynamometer wirkende Drehmoment zu berechnen, wenn der Apparat mit einem Nebenschluß gebraucht wird.

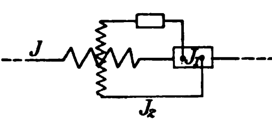


Fig. 11.

Die Schaltung wird in der Regel so gemacht, daß parallel zu einem Widerstand r_1, der die Selbstinduktion L_1 besitzen möge, ein Stromkreis abgezweigt wird, welcher die bewegliche Spule des Dynamometers enthält (Fig. 11); Widerstand und Selbstinduktion der Abzweigung seien mit r_2 und L_2 bezeichnet. Die feste Spule liegt im unverzweigten Strom i. Der Dynamometerausschlag ist also proportional $M(i i_2) = (\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}_2)$. Es ist:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2$$
$$\mathfrak{J}_1 (r_1 + j \omega L_1) = \mathfrak{J}_2 (r_2 + j \omega L_2).$$

Die Elimination von $\mathfrak{J}_1$ ergibt,

$$\mathfrak{J}(r_1 + j \omega L_1) = \mathfrak{J}_2 (r_1 + r_2 + j \omega (L_1 + L_2)).$$

Eine Multiplikation mit $\mathfrak{J}$ bzw. $j \mathfrak{J}$ gibt:

$$J^2 r_1 = (\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}_2)(r_1 + r_2) + (\mathfrak{J} \times j \mathfrak{J}_2) \omega (L_1 + L_2)$$
$$J^2 \omega L_1 = -(\mathfrak{J} \times j \mathfrak{J}_2)(r_1 + r_2) + (\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}_2) \omega (L_1 + L_2).$$

Eliminiert man hieraus $(\mathfrak{J} \times j \mathfrak{J}_2)$, so folgt:

$$(\mathfrak{J} \times \mathfrak{J}_2) = \frac{r_1 (r_1 + r_2) + \omega^2 L_1 (L_1 + L_2)}{(r_1 + r_2)^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2} J^2.$$

Dieser Ausdruck wird von L_1 und L_2 unabhängig, wenn

$$\frac{r_1(r_1+r_2)}{(r_1+r_2)^2} = \frac{\omega^2 L_1(L_1+L_2)}{\omega^2(L_1+L)^2}$$

ist, d. h. wenn

$$r_1 : r_2 = L_1 : L_2$$

ist. Auf dieselbe Bedingung wird man geführt, wenn man die feste Spule in den Zweig 1 legt. Dies ist also die Bedingung dafür, daß das Dynamometer für Gleichstrom und Wechselstrom beliebiger Frequenz *dieselben* Angaben macht.[1])

Zweiter Abschnitt.

Die mehrwelligen Ströme.

7. Der periodische Strom und der Wechselstrom. Bisher ist nur von Strömen die Rede gewesen, welche innerhalb einer Periode einen sinusförmigen Verlauf haben. Wir wollen nunmehr zu Strömen beliebiger Kurvenform übergehen. Ganz allgemein ist unter einem *periodischen Strom* ein solcher zu verstehen, der sich zeitlich beliebig ändert und nur der einen Bedingung unterworfen ist, daß er in irgend zwei Zeitpunkten, die um ein festes Intervall T — die Periodendauer — voneinander entfernt liegen, gleiche Werte haben soll. Eine Funktion $f(t)$, durch welche der periodische Strom dargestellt wird, hat also die Bedingung zu erfüllen

$$i = f(t) = f(t+T) \tag{1}$$

und damit auch

$$= f(t+2T) = f(t+3T) = \cdots = f(t-T) = f(t-2T) = \cdots$$

Ein *reiner Wechselstrom* hat außerdem noch die zweite Bedingung zu erfüllen, daß *innerhalb* einer Periode die gesamte nach *einer* Richtung durch den Strom transportierte Elektrizitätsmenge gleich derjenigen in entgegengesetzter Richtung ist, oder

---

1) Dieser Satz ist bereits von M. Wien (Wied. Ann. **63**, 390) abgeleitet worden. Neuerdings ist von Rosa (Bull. of the bur. of stand **3**, 45, 1907.) eine Berechnung für den Fall $L_2 = 0$ gegeben. Rosa kommt zu dem Schluß, daß in diesem Falle die Ablenkungen des Dynamometers von der Selbstinduktion L_1 des Zweiges 1 unabhängig sind. Das ist aber streng genommen nicht richtig.

unter Rücksicht auf das Zeichen der Stromrichtung: die gesamte von einem Wechselstrom in einer Richtung mitgeführte Elektrizitätsmenge ist innerhalb einer Periodendauer Null. Nun ist die in der Zeit dt fließende Elektrizitätsmenge idt, wenn i den Augenblickswert des Stromes bedeutet. Folglich gilt für einen Wechselstrom die Bedingungsgleichung:

$$q = \int_0^T i\,dt = 0. \tag{2}$$

Werden die Zeiten als Abszissen, die Augenblickswerte der Ströme als Ordinaten aufgetragen (Fig. 12), so ist:

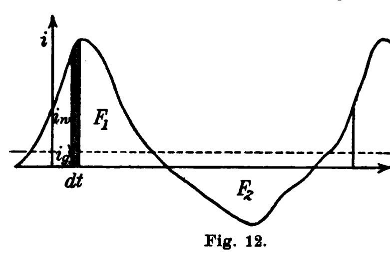


Fig. 12.

$$q = F_1 - F_2, \tag{3}$$

wo F_1 und F_2 die Flächeninhalte der oberhalb und unterhalb der Abszissenachse liegenden von der Stromkurve begrenzten Flächenstücke bedeuten. Bei einem reinen Wechselstrom müssen also diese beiden Flächenstücke gleichen Inhalt haben

$$F_1 = F_2,$$

dagegen brauchen sie nicht einander kongruent zu sein.

Kehren wir noch einmal zu dem allgemeinen periodischen Strom zurück, bei ihm hat $q = F_1 - F_2$ einen für jede Periodendauer konstanten endlichen Wert, der von dem Anfangswert der Periodendauer unabhängig ist (vgl. S. 6). Es fließt innerhalb jeder beliebigen Periodendauer dieselbe mittlere Elektrizitätsmenge in einer Richtung durch den Draht; setzt man

$$q = i_g T, \tag{4}$$

wo i_g konstant ist, so kann i_g als derjenige Gleichstrom aufgefaßt werden, der innerhalb einer Periodendauer T den gleichen Transport von Elektrizität bewirkt als der periodische Strom. Definiert man nun einen Strom i_w durch

$$i_w = i - i_g, \tag{5}$$

so ist i_w offenbar wieder periodisch und, da

$$\int_0^T i_w\,dt = q - i_g T = 0 \tag{6}$$

ist, auch ein reiner Wechselstrom. Wir schließen daher aus Gleichung (5) ganz allgemein: jeder periodische Strom i kann zerlegt werden in einen Gleichstrom i_g und einen reinen Wechselstrom i_w. Um dies zu tun, hat man offenbar in der Darstellung der Kurve i die Abszissenachse parallel mit sich selbst so lange zu verschieben, bis die Flächenstücke oberhalb und unterhalb der Parallelen einander gleich werden Der Abstand der neuen Achse von der alten ist i_g (Fig. 12).

Periodische Ströme entstehen z. B., wenn man eine Gleichstromquelle durch einen periodisch wirkenden Unterbrecher oder durch periodisch sich ändernde Widerstände (Mikrophon, singende Bogenlampe) schließt oder einen Wechselstrom durch eine Ventilvorrichtung (Aluminiumzelle, Quecksilberlichtbogen) schickt. Reine Wechselströme dagegen entstehen durch Induktion in rotierenden Maschinen und in Transformatoren. Betrachten wir nämlich irgendeinen geschlossenen Stromkreis in einer Wechselstrommaschine oder in einem Transformator, so ist der gesamte Induktionsfluß Φ, welcher durch die Schleife tritt, eine periodische Funktion der Zeit,

$$\Phi(t + T) = \Phi(t).$$

Die dadurch induzierte *EMK* v ist also

$$v = \frac{d\Phi}{dt}$$

und daher

$$\int_0^T v\,dt = (\Phi(T) - \Phi(0)) = 0$$

eine reine Wechselspannung.

8. Die Darstellung mehrwelliger Ströme durch Fouriersche Reihen. Eine beliebige einfach periodische Funktion kann, wie Fourier zuerst gezeigt hat, mathematisch stets dargestellt werden, durch eine Reihe von Sinusfunktionen, deren Perioden sich wie ganze Zahlen verhalten; die Zahl der Glieder der Reihe kann endlich oder unendlich groß sein. Physikalisch gesprochen heißt das: einen beliebigen periodischen Strom kann man sich zusammengesetzt denken aus einer sinusförmigen Grundschwingung, welche dieselbe Frequenz besitzt wie der periodische Strom, und einer darüber gelagerten endlichen oder unendlichen Zahl von sinusförmigen Oberschwingungen, deren Frequenzen 2, 3, 4 ... mal so

groß sind als die der Grundwelle. Dies ist auch der Grund, weswegen man Wechselströme von beliebiger Kurvenform als mehrwellige Wechselströme bezeichnet.

In Formeln ausgedrückt heißt das: ein mehrwelliger Strom i ist darstellbar in der Form:

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} i_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \tag{1}$$

oder

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} J_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \gamma_k), \tag{2}$$

darin sind $i_1, i_2, i_3, \ldots$ die Höchstwerte, oder $J_1, J_2, J_3, \ldots$ die Effektivwerte der sinusförmigen Teilwellen, deren Frequenzen $\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T} \cdots$ sind.

Setzt man

$$a_k = i_k \cos\gamma_k, \quad b_k = i_k \sin\gamma_k, \tag{3}$$

so erhält man die ebenso wichtige Darstellungsform:

$$i = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\omega t. \tag{4}$$

Die Umrechnung der Formel (4) in die Darstellung (1) erfolgt durch die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} i_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, & \operatorname{tg}\gamma_k = \frac{b_k}{a_k} \\ \text{oder } \sin\gamma_k = \frac{b_k}{i_k}, & \cos\gamma_k = \frac{a_k}{i_k}. \end{array} \right. \tag{5}$$

Der Wurzel gibt man das positive oder negative Zeichen; die Quadranten, in welche der Phasenwinkel γ_k fällt, sind dann durch die Gleichungen für den sinus und cosinus bestimmt.

Erleidet die Stromkurve zu einer Zeit t' einen Sprung[1]) von

1) Wirkliche Diskontinuitäten kommen in der Natur nicht vor. Tatsächlich kann also ein wirklicher Sprung des Stromes nicht eintreten, sondern nur ein wenn auch sehr scharfer Übergang von dem einen Wert in den andern. Ein Beispiel ist: das Schließen einer Gleichstromquelle durch einen induktionslosen Widerstand. Da streng genommen jeder Stromkreis Induktion besitzen muß, so kann der Strom nicht momentan zustande kommen, wenn auch die Zeit des Anstiegs sehr kurz gemacht werden kann.

i_a auf i_b, so gibt, wie in der Theorie der Fourierschen Reihen gezeigt wird, die Reihe für $t = t'$ den arithmetischen Mittelwert von i_a und i_b

$$f(t') = \frac{1}{2}(i_a + i_b).$$

Aus der Reihenentwicklung (4) geht wieder unmittelbar hervor, daß der periodische Strom in eine Gleichstromkomponente b_0 und einen reinen Wechselstrom zerfällt, der durch die Sinus- und die Kosinusreihe dargestellt ist.

Die Koeffizienten werden folgendermaßen gefunden: ist h eine ganze Zahl, so bildet man:

$$M(i \sin h\omega t) \text{ und } M(i \cos h\omega t).$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (8) und (15) in § 3 ergibt sich:

$$\text{(6)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} a_h &= M(i \sin h\omega t) \\ \frac{1}{2} b_h &= M(i \cos h\omega t) \end{aligned} \right. \quad (h = 1, 2, 3)$$

und

$$\text{(6a)} \qquad b_0 = M(i).$$

Stellt man eine beliebig geformte Kurve durch Fouriersche Reihen dar, so ist diese Darstellung vollkommen eindeutig. Es ist aber durchaus möglich, andere Darstellungsformen zu wählen, z. B. in einer Reihe von Besselschen Funktionen.[1]) Liegen nicht besondere Gründe vor, so pflegt man in der Wechselstromtechnik sich auf die Darstellung durch Fouriersche Reihen zu beschränken.

Die bei weitem meisten Wechselströme, welche in der Praxis vorkommen, haben die Eigentümlichkeit, daß die negative Kurvenhälfte der positiven spiegelbildlich gleich ist, d. h. zu zwei Abszissen (Fig. 16)

$$OA = t \text{ und } OA' = \frac{T}{2} + t$$

gehören gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Ordinaten:

1) Vgl. Schafheitlin. Die Theorie der Besselschen Funktionen. Leipzig 1908, B. G. Teubner. S. 52ff. Die Verwendung von Fourierschen Reihen kann z. B. unbequem werden bei den sog. phasewechselnden Schwingungen. s. Strasser u. Zenneck Ann. d. Phys. **20**, 759, 1906 und Rogowski, ebenda S. 766.

$$AB = -A'B'$$

oder

(7) $$f\left(\frac{T}{2}+t\right) = -f(t).$$

Die Reihenentwicklung (1) gibt, da $\frac{\omega T}{2} = \pi$ ist:

$$f\left(\frac{T}{2}+t\right) = \sum i_k \sin(k\pi + k\omega t + \gamma_k) = \sum (-1)^k i_k \sin(k\omega t + \gamma_k).$$

Diese Reihe ist offenbar nur dann gleich $-\sum i_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$, wenn k ungerade ganze Zahlen sind.

Wenn also die negative Kurvenhälfte der positiven spiegelbildlich gleich ist, so enthält der Strom nur die ungeradzahligen Vielfachen der Grundfrequenz als Oberschwingungen; die geradzahligen kommen nicht darin vor.

9. Beispiele von Reihenentwicklungen. Es mögen die Reihen für einige Kurvenformen entwickelt werden. Sei angenommen, ein Strom (Fig. 13) habe innerhalb der ersten Halbperiode einen beliebigen Verlauf, in der zweiten Halbperiode dagegen sei er gleich Null; dann braucht man in (6) und (6a) auf S. 29 nur über die erste Halbperiode zu integrieren, und es wird

(1) $$\begin{cases} a_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} i \sin k\omega t \, dt = M_{\frac{T}{2}}(i \sin k\omega t) \\ b_k = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} i \cos k\omega t \, dt = M_{\frac{T}{2}}(i \cos k\omega t) \end{cases}$$

(1a) $$b_0 = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i dt.$$

Die so berechnete Reihe zerlegen wir in drei Teile:

(2) $$i_{\mathrm{I}} = K + G + U.$$

K ist die Gleichstromkomponente b_0, G ist die Summe aller Oberschwingungen von gerader Ordnungszahl, U die Summe aller

Oberschwingungen von ungerader Ordnungszahl. Verschiebt man die Kurve um eine halbe Periodendauer nach vorwärts, so hat man in (1) ωt durch $(\omega t + \pi)$ zu ersetzen. Die so entstehende Kurve ist in Fig. 14 dargestellt. Da nun:

$$\sin(k\omega t + k\pi) = (-1)^k \sin k\omega t,$$
$$\cos(k\omega t + k\pi) = (-1)^k \cos k\omega t \text{ ist,}$$

so kehren alle Glieder mit ungerader Ordnungszahl ihr Vorzeichen

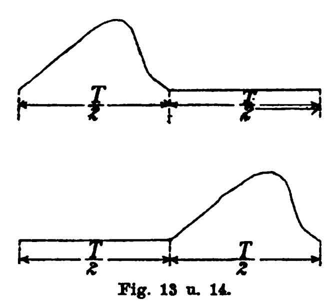


Fig. 13 u. 14.

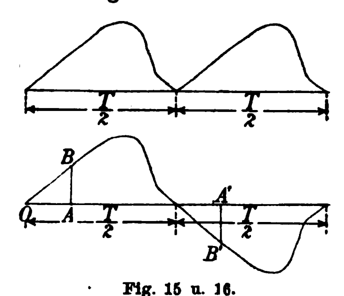


Fig. 15 u. 16.

um, während es alle Glieder mit gerader Ordnungszahl behalten. Also hat die Kurve Fig. 14 die Gleichung

(3) $$i_{II} = K + G - U.$$

Addiert man die Kurven I und II, so ergibt sich die Kurve III (Fig. 15); ihre Gleichung ist offenbar

(4) $$i_{III} = i_I + i_{II} = 2(K + G).$$

Bildet man dagegen die Differenz der Kurven I und II, so erhält man die Kurve IV (Fig. 16), deren Gleichung somit

(5) $$i_{IV} = i_I - i_{II} = 2\,U$$

Fig. 17.

ist. Sie ist reiner Wechselstrom und enthält, wie wir bereits aus § 8 wissen, nur die ungeradzahligen Oberschwingungen.

Es mögen im folgenden für verschiedene einfache Formen der Kurven die Größen K, G, U berechnet werden.

Beispiele:

a) Die Kurve sei in der ersten Halbperiode ein Dreieck ABC (Fig. 17), in der zweiten Halbperiode falle sie mit der Abszissen-

achse zusammen. Der Punkt B habe die Ordinate a; weiter seien die Projektionen der Linien AB und BC:

$$AE = \frac{\alpha T}{2}, \qquad EC = \frac{\beta T}{2}, \quad \text{wo also}$$

$$\alpha + \beta = 1 \quad \text{ist.} \tag{6}$$

Die Gleichung von AB ist: $y = \frac{2a}{\alpha T} t$

und von BC: $y = \frac{2a}{\beta T}\left(\frac{T}{2} - t\right)$; daher ist:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{\alpha T}{2}} \frac{2a}{\alpha T} t \sin k\omega t\, dt + \frac{2}{T}\int_{\frac{\alpha T}{2}}^{\frac{\beta T}{2}} \frac{2a}{\beta T}\left(\frac{T}{2} - t\right) \sin k\omega t\, dt.$$

Die Integration ergibt:

$$a_k = \frac{a \sin k\alpha\pi}{\alpha\beta k^2\pi^2}. \tag{7}$$

Ersetzt man in der Formel für a_k die Sinus durch die Kosinus und führt die Integration aus, so erhält man:

$$b_k = \frac{a}{\alpha\beta k^2\pi^2}\left[\cos k\alpha\pi - \beta - (-1)^k \alpha\right] \tag{8}$$

d. h. für gerades k

$$b_k = \frac{a}{\alpha\beta k^2\pi^2}(\cos k\alpha\pi - 1) \tag{8a}$$

und für ungerades

$$b_k = \frac{a}{\alpha\beta k^2\pi^2}(\cos k\alpha\pi + \alpha - \beta). \tag{8b}$$

Weiter ist:

$$b_0 = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} y\, dt = \frac{a}{4}. \tag{8c}$$

Folglich

$$K = \frac{a}{4} \tag{9}$$

$$(10)\qquad G = \sum \frac{a}{\alpha\beta k^2\pi^2}\left[\sin k\alpha\pi \sin k\omega t + (\cos k\alpha\pi - 1)\cos k\omega t\right]$$

$$= \sum \frac{2a\sin\frac{k\alpha\pi}{2}}{\alpha\beta k^2\pi^2}\sin k\left(\omega t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad \text{und}$$

$$U = \sum \frac{a}{\alpha\beta k^2\pi^2}\left[\sin k\alpha\pi \sin k\omega t\right.$$

$$\left. + (\cos k\alpha\pi + \alpha - \beta)\cos k\omega t\right]$$

$$(11)\qquad = \sum \frac{a\sqrt{1 + 2(\alpha-\beta)\cos k\alpha\pi + (\alpha-\beta)^2}}{\alpha\beta k^2\pi^2}\sin(k\omega t + \psi),$$

$$\text{wo} \quad tg\psi = \frac{\cos k\alpha\pi + \alpha - \beta}{\sin k\alpha\pi} \quad \text{ist.}$$

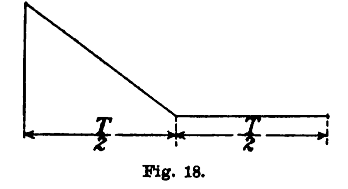


Fig. 18.

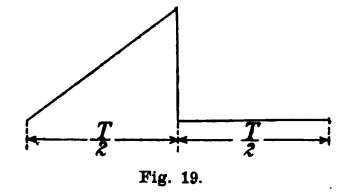


Fig. 19.

Für $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ erhält man die Formeln für eine gleichschenklige Dreieckskurve von der Höhe a:

$$(12)\qquad \begin{cases} K = \frac{a}{4} \\ G = -\frac{2a}{\pi^2}\left\{\cos 2\omega t + \frac{\cos 6\omega t}{9} + \frac{\cos 10\omega t}{25}\cdots\right\} \\ U = \frac{4a}{\pi^2}\left\{\sin \omega t - \frac{\sin 3\omega t}{9} + \frac{\sin 5\omega t}{25}\cdots\right\} \end{cases}$$

$\alpha = 0,\ \beta = 1$ ergibt die Kurve Fig. 18 und die Reihen:

$$(13)\qquad \begin{cases} K = \frac{a}{4}, \qquad G = \sum \frac{a}{k\pi}\sin k\omega t \\ U = \frac{a}{\pi}\sum \frac{\sin k\omega t}{k} + \frac{a}{\pi^2}\sum \frac{\cos k\omega t}{k^2}. \end{cases}$$

Aus $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ergibt sich (Fig. 19):

$$(14)\qquad \begin{cases} K = \frac{a}{4}, \qquad G = -\frac{a}{\pi}\sum \frac{\sin k\omega t}{k} \\ U = +\frac{a}{\pi}\sum \frac{\sin k\omega t}{k} - \frac{a}{\pi^2}\sum \frac{\cos k\omega t}{k^2}. \end{cases}$$

b) Um die Formeln für ein gleichschenkliges Trapez zu erhalten, stellen wir die Gleichungen für zwei Dreiecke auf, von denen das eine ACB (Fig. 20) die Projektionen $AE = \frac{\alpha T}{2}$, $EB = \frac{\beta T}{2}$, das andere ADB die Projektionen $AF = \frac{\beta T}{2}$ und $FB = \frac{\alpha T}{2}$ hat. Die Höhen beider Dreiecke sind einander gleich und zwar

$$EC = FD = a\beta. \tag{15}$$

Bildet man die Summe dieser beiden Dreieckslinien, so entsteht das gleichschenklige Trapez $AHJB$; die Höhe desselben ist:

$$EH = EC + EK = EC + \frac{DF \cdot AE}{AF} = a\beta\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) = a.$$

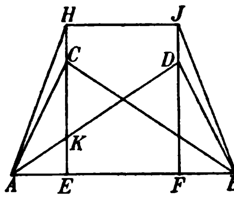


Fig. 20.

Nun sind die Koeffizienten der Reihen für ACB nach Gleichung (7) und (8^{a-c}):

$$a_k = \frac{a \sin k\alpha\pi}{\alpha k^2 \pi^2}, \quad b_0 = \frac{a\beta}{4},$$

$$b_k = \frac{a}{\alpha k^2 \pi^2}(\cos k\alpha\pi - 1) \quad (k \text{ gerade}),$$

$$b_k = \frac{a}{\alpha k^2 \pi^2}(\cos k\alpha\pi + \alpha - \beta) \quad (k \text{ ungerade})$$

und daher für ADB

$$a_k = \frac{a \sin k\beta\pi}{\alpha k^2 \pi^2}, \quad b_0 = \frac{a\beta}{4},$$

$$b_k = \frac{a}{\alpha k^2 \pi^2}(\cos k\beta\pi - 1) \quad (k \text{ gerade}),$$

$$b_k = \frac{a}{\alpha k^2 \pi^2}(\cos k\beta\pi + \beta - \alpha) \quad (k \text{ ungerade}).$$

Berücksichtigt man, daß

$$\sin k\beta\pi = -(-1)^k \sin k\alpha\pi, \qquad \cos k\beta\pi = (-1)^k \cos k\alpha\pi$$

ist, so ergeben sich aus der Summierung die Koeffizienten für das Trapez $AHJB$:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= 0, \\ b_k &= \frac{2a}{\alpha k^2 \pi^2}(\cos k\alpha\pi - 1), \end{aligned}\right\} \quad (k \text{ gerade})$$

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{2a\sin k\alpha\pi}{\alpha k^2\pi^2}, \\ b_k &= 0, \end{aligned}\right\} (k \text{ ungerade})$$

$$b_0 = \frac{a\beta}{2}$$

oder

$$(16) \qquad \begin{cases} K = \dfrac{a(1-\alpha)}{2} \\ G = -\dfrac{4a}{\alpha\pi^2}\sum \dfrac{1}{k^2}\sin^2\dfrac{k\alpha\pi}{2}\cos k\omega t, \\ U = \dfrac{2a}{\alpha\pi^2}\sum \dfrac{1}{k^2}\sin k\alpha\pi \sin k\omega t. \end{cases}$$

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ erhält man wieder die bereits oben abgeleiteten Formeln für ein gleichschenkliges Dreieck.

Von Interesse sind noch die folgenden Spezialfälle, für welche nur die Reihen $2U$ hergesetzt seien:

$$(17) \qquad \alpha = \frac{1}{3}; \qquad 2U = \frac{6\sqrt{3}\,a}{\pi^2}\left\{\sin \omega t - \frac{1}{25}\sin 5\omega t + \frac{1}{49}\sin 7\omega t - \frac{1}{121}\sin 11\omega t + \cdots\right\}$$

$$(18) \qquad \alpha = \frac{1}{4}; \qquad 2U = \frac{8\sqrt{2}\,a}{\pi^2}\left\{\sin \omega t + \frac{1}{9}\sin 3\omega t - \frac{1}{25}\sin 5\omega t - \frac{1}{49}\sin 7\omega t + \frac{1}{81}\sin 9\omega t + \cdots\right\}$$

$$(19) \qquad \alpha = 0 \text{ (Rechteck)}; \quad 2U = \frac{4a}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right)$$

Fügt man zu dem Trapez für $\alpha = \frac{1}{4}$ (Höhe a), ein gleichschenkliges Dreieck hinzu, dessen Höhe $a\sqrt{2}$ ist, so erhält man ein Polygon (Fig. 21) $AFGHD$, für welches nach (18) und (12) die Gleichung gilt:

$$(20) \qquad U = \frac{8\sqrt{2}\,a}{\pi^2}\left(\sin \omega t - \frac{1}{49}\sin 7\omega t + \frac{1}{81}\sin 9\omega t - \cdots\right)$$

Da hier ein großer Teil der Oberschwingungen wegfällt und die Amplituden der übrigbleibenden verhältnismäßig klein gegen die Grundschwingung sind, so schmiegt sich dieses Polygon ziemlich gut der Sinuslinie an. Wird der Höchstwert der Sinuslinie gleich 100 gesetzt, so sind bei gleichem Effektivwert die Ordinaten der gebrochenen Linie in $\frac{T}{4}$ gleich 74,4, in $\frac{T}{2}$ gleich 105,2 zu wählen.

c) Die Stromkurve sei eine Parabel, deren Scheitel die Ordinate a besitzt. Die Gleichung der Parabel ist:

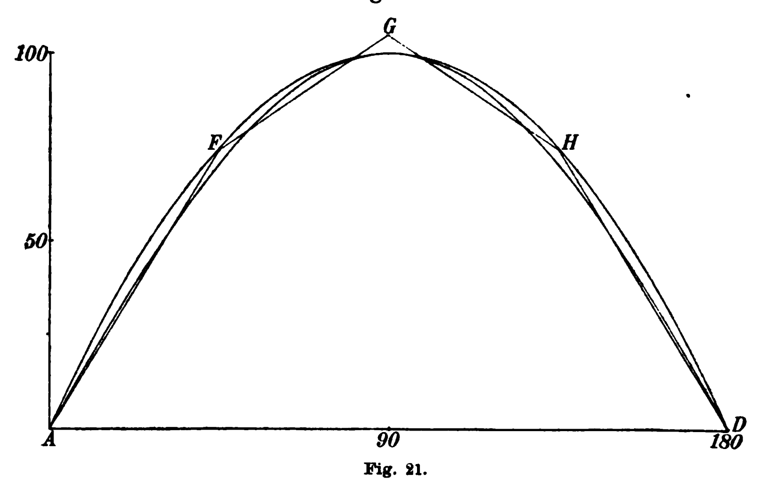


Fig. 21.

$$i = \frac{16at}{T^2}\left(\frac{T}{2} - t\right). \tag{21}$$

Daraus ergeben sich die Koeffizienten

$$a_g = 0, \quad a_u = \frac{16a}{k^3\pi^3}, \quad b_g = -\frac{8a}{k^2\pi^2}, \quad b_u = 0, \quad b_0 = \frac{a}{3}, \tag{22}$$

folglich

$$2G = -\frac{16a}{\pi^2}\sum\frac{\cos k\omega t}{k^2}, \qquad 2U = \frac{32a}{\pi^3}\sum\frac{\sin k\omega t}{k^3}. \tag{23}$$

Da die Amplituden der Oberschwingungen in U mit der dritten Potenz der Ordnungszahlen abnehmen, so schmiegt sich auch die Parabel recht nahe der Sinuslinie an (Fig. 21) (Parabel außen, Sinuslinie innen).

d) Die Stromkurve setze sich aus zwei symmetrischen Ästen des hyperbolischen Sinus zusammen (Fig. 22)

$$i = \mathfrak{Sin}\,\frac{2p\pi t}{T} \qquad \text{für} \quad t = 0 \cdot\cdot \frac{T}{4},$$

$$i = \mathfrak{Sin}\,p\pi\left(1 - \frac{2t}{T}\right) \quad \text{für} \quad t = \frac{T}{4} \cdots \frac{T}{2},$$

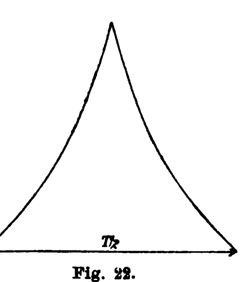


Fig. 22.

wo p ein Parameter ist, welcher die Größe des Höchstwertes für $t = \frac{T}{4}$ bestimmt: $i_m = \mathfrak{Sin}\frac{p\pi}{2}$.

Es mögen der Einfachheit halber nur die Koeffizienten der ungeradzahligen Ordnung berechnet werden. Es ergibt sich

$$a_k = \frac{2p}{\pi(p^2 + k^2)}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{p\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2},$$

$$b_k = 0,$$

so daß:

$$(24)\quad 2U = \frac{4p\,\mathfrak{Cof}\frac{p\pi}{2}}{\pi(p^2+1)}\left\{\sin\omega t - \frac{p^2+1}{p^2+9}\sin 3\omega t + \frac{p^2+1}{p^2+25}\sin 5\omega t \cdots\right\}.$$

10. Die Summe mehrwelliger Ströme. Es war als eine für die Sinuskurve wichtige Eigenschaft hingestellt worden, daß die Summe zweier Sinusströme wieder eine Sinusform ergibt. Es soll nunmehr untersucht werden, ob dieser Satz auch für beliebige Kurvenformen gültig ist. Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir zunächst die Gleichung für alle Ströme gleicher Kurvenform aufstellen. Sei

$$(1) \qquad i = f(\omega t)$$

ein mehrwelliger Strom; dann erhält man einen Strom gleicher oder besser ähnlicher Kurvenform, indem man sämtliche Ordinaten der Kurve auf dasselbe konstante Vielfache λ bringt, und die so entstehende Kurve zeitlich um einen beliebigen Betrag φ gegen die ursprüngliche verschiebt.

$$(2) \qquad i_1 = \lambda f(\omega t + \varphi)$$

ist daher der mathematische Ausdruck für sämtliche Ströme, die die gleiche Kurvenform wie (1) haben. λ und φ sind zwei Parameter, welche die Lage und Größe der einzelnen Ströme charakterisieren.

Wenn also die Summe zweier Ströme gleicher Kurvenform wieder einen Strom derselben Kurvenform ergeben soll, so müssen, wenn λ_1, φ_1 und λ_2, φ_2 vier willkürliche Konstanten sind, welche die Ströme i_1 und i_2 charakterisieren, zwei Konstanten λ_3 und φ_3 gefunden werden können, so daß

$$\lambda_1 f(\omega t + \varphi_1) + \lambda_2 f(\omega t + \varphi_2) = \lambda_3 f(\omega t + \varphi_3) \tag{3}$$

wird. Setzt man für $f(\omega t)$ eine Fouriersche Reihe:

$$f(\omega t) = \sum a_k \sin k\omega t + \sum b_k \cos k\omega t, \tag{4}$$

so ist:

$$f(\omega t + \varphi) = \sum (a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi) \sin k\omega t, \\ + \sum (a_k \sin k\varphi + b_k \cos k\varphi) \cos k\omega t.$$

Dies in Gleichung (3) eingesetzt und die Koeffizienten von $\sin k\omega t$ und $\cos k\omega t$ auf beiden Seiten einander gleich gesetzt, ergibt:

$$\lambda_1 (a_k \cos k\varphi_1 - b_k \sin k\varphi_1) + \lambda_2 (a_k \cos k\varphi_2 - b_k \sin k\varphi_2) = \\ = \lambda_3 (a_k \cos k\varphi_3 - b_k \sin k\varphi_3)$$

und

$$\lambda_1 (a_k \sin k\varphi_1 + b_k \cos k\varphi_1) + \lambda_2 (a_k \sin k\varphi_2 + b_k \cos k\varphi_2) = \\ = \lambda_3 (a_k \sin k\varphi_3 + b_k \cos k\varphi_3)$$

oder anders geordnet:

$$a_k(\lambda_1 \cos k\varphi_1 + \lambda_2 \cos k\varphi_2 - \lambda_3 \cos k\varphi_3) = \\ = b_k(\lambda_1 \sin k\varphi_1 + \lambda_2 \sin k\varphi_2 - \lambda_3 \sin k\varphi_3)$$

und

$$a_k(\lambda_1 \sin k\varphi_1 + \lambda_2 \sin k\varphi_2 - \lambda_3 \sin k\varphi_3) = \\ = - b_k(\lambda_1 \cos k\varphi_1 + \lambda_2 \cos k\varphi_2 - \lambda_3 \cos k\varphi_3)$$

für $k = 1, 2, 3 \ldots$

Daraus folgt: entweder es ist:

$$a_k = 0, \qquad b_k = 0 \tag{5}$$

oder

$$\begin{aligned} \lambda_1 \sin k\varphi_1 + \lambda_2 \sin k\varphi_2 &= \lambda_3 \sin k\varphi_3, \\ \lambda_1 \cos k\varphi_1 + \lambda_2 \cos k\varphi_2 &= \lambda_3 \cos k\varphi_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Wir verfolgen zunächst die zweite Möglichkeit. Aus Gleichung (6) ergeben sich für die gesuchten λ_3 und φ_3 folgende Gleichungen:

$$\lambda_3^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \cos k(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{7}$$

und

$$\operatorname{tg} k\varphi_3 = \frac{\lambda_1 \sin k\varphi_1 + \lambda_2 \sin k\varphi_2}{\lambda_1 \cos k\varphi_1 + \lambda_2 \cos k\varphi_2} \tag{8}$$

für $k = 1, 2, 3 \ldots$

Das heißt λ_3 und φ_3 sind im allgemeinen überbestimmt, da man aus den Gleichungen (7) und (8) im allgemeinen für jeden Wert von k ein anderes Wertepaar λ_3, φ_3 erhalten würde. Dieser Widerspruch löst sich, indem nur a_1 und b_1 von Null verschieden angenommen werden, dagegen alle anderen gemäß der ersten durch Gleichung (5) ausgedrückten Möglichkeit

$$a_2 = a_3 = \cdots = 0, \quad b_2 = b_3 = \cdots = 0$$

sind. Dann gelten also die Gleichungen (7) und (8) nur für $k = 1$ und λ_3, φ_3 sind eindeutig bestimmt. Das heißt: im allgemeinen muß die Stromkurve einwellig sein, wenn die Summe zweier Ströme derselben Kurvenform wieder ein Strom gleicher Kurvenform werden soll.

Nun gibt es aber einige besondere Fälle, wo die Kurve nicht sinusförmig zu sein braucht. Es sind ganz bestimmte Stromkurven, welche nur bei ganz bestimmten Phasenverschiebungen sich zu einem Strom gleicher Kurve zusammensetzen. Diese Kurven erhält man offenbar in dem besonderen Fall, daß Gleichung (7) und (8) von k unabhängig werden. Das geschieht, wenn

$$\cos k\varphi = \pm \cos \varphi, \quad \sin k\varphi = \pm \sin \varphi \tag{9}$$

werden; derartige Gleichungen sind aber nur möglich, wenn φ ein ganzzahliger Bruchteil von π ist. Wir wollen also jetzt annehmen, daß

$$\varphi_1 = \frac{p_1}{q}\pi, \quad \varphi_2 = \frac{p_2}{q}\pi, \quad \varphi_3 = \frac{p_3}{q}\pi \tag{10}$$

ist, wo die p und q ganze Zahlen sind, und wollen uns fragen, welche Bedingungen die λ und k erfüllen müssen, damit Gleichung (9) bestehen kann.

Aus Gleichung (6) lassen sich die Quotienten der λ berechnen; durch Eliminieren von λ_2 ergibt sich:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{\sin k(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin k(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

und durch Eliminieren von λ_1

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{\sin k(\varphi_3 - \varphi_1)}{\sin k(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Setzt man die Werte für die φ aus Gleichung (10) ein, so sieht man, daß die Quotienten für die λ nur dann von der Größe von k unabhängig werden, wenn k die Form hat

$$k = hq \pm 1, \tag{11}$$

wo h eine ganze Zahl ist, die noch näher zu bestimmen ist. Man erhält $k\varphi = hp\pi \pm \varphi$ und somit

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_3} &= \frac{\sin[(hp_3\pi \pm \varphi_3) - (hp_2\pi \pm \varphi_2)]}{\sin[(hp_1\pi \pm \varphi_1) - (hp_2\pi \pm \varphi_2)]} = (-1)^{h(p_3-p_1)} \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_3} &= \frac{\sin[(hp_3\pi \pm \varphi_3) - (hp_1\pi \pm \varphi_1)]}{\sin[(hp_2\pi \pm \varphi_2) - (hp_1\pi \pm \varphi_1)]} = (-1)^{h(p_3-p_2)} \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \end{aligned}\right. . \tag{12}$$

Es muß also sowohl $h(p_3 - p_1)$, als auch $h(p_3 - p_2)$ eine gerade Zahl sein, d. h. entweder h gerade oder $(p_3 - p_1)$ und gleichzeitig $(p_3 - p_2)$ gerade sein.

Beispiel:

$$q = 3, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{3} (= 60^0), \quad \varphi_3 = \frac{2\pi}{3} (= 120^0),$$

d. h.
$$p_1 = 0, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = 2,$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{-\sin\frac{\pi}{3}} = -1, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 1.$$

Da $p_3 - p_2 = 1$ ungerade ist, so müssen für h gerade Zahlen gewählt werden. D. h. $k = 3h \pm 1$ für $h = 0, 2, 4 \ldots$ ergibt: $k = 1, 5, 7, 11, 13 \ldots$ Mithin gilt für die Kurvenform:

$$f(\omega t) = \sum (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t) \text{ für } k = 1, 5, 7, 11, 13 ..$$

die Beziehung

$$-f(\omega t) + f\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = f\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Dagegen für:

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = 2, \qquad p_3 = 4,$$

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \qquad \varphi_3 = \frac{4\pi}{3}$$

sind sowohl $p_3 - p_1 = 4$, als auch $p_3 - p_2 = 2$ gerade. Daher kann auch in diesem Fall für h jede beliebige ganze Zahl gewählt werden. D. h.

$$k = 3h \pm 1 \text{ für } h = 0, 1, 2 \ldots$$

oder

$$k = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11 \ldots$$

und nach Gleichung (12)

$$\lambda_1 : \lambda_3 = -1, \qquad \lambda_2 : \lambda_3 = -1.$$

Folglich gilt für die Stromkurve

$$f(\omega t) = \sum (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t),$$
$$k = 1, 2, 4, 5, 7, 8 \ldots,$$

die Beziehung:

$$-f(\omega t) - f\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) = f\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

11. Kurvenanalyse durch Summierung von Strömen gleicher Kurvenform, Wir wollen noch untersuchen, welche Bedeutung die auf S. 4 definierte Funktion φ erhält, wenn statt $s(t)$ eine Fouriersche Reihe gesetzt wird; sei also

$$f(t) = \sum f_k(t), \tag{1}$$

$$f_k(t) = a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t \tag{1a}$$

und

$$\varphi_k(t) = f_k(t) + f_k\left(t + \frac{T}{n}\right) + f_k\left(t + \frac{2T}{n}\right) + \cdots + f_k\left(t + \frac{(n-1)T}{n}\right). \tag{2}$$

Dann ist nach dem oben bewiesenen Satze (vgl. S. 4) im allgemeinen:

$$\varphi_k(t) \equiv 0.$$

Nur wenn T/n ein ganzes Vielfaches der Periode T/k von $f_k(t)$ ist, wird:

$$\varphi_k(t) = n f_k(t). \tag{3}$$

Wird dieses Vielfache mit λ bezeichnet, so gilt also Gleichung (3) nur dann, wenn $k = \lambda n$, $(\lambda = 1, 2 \ldots)$ ist. Folglich ist:

$$\varphi(t) = \sum_{h=0}^{n-1} f\left(t + \frac{hT}{n}\right) = n \sum_{\lambda=1,2,\ldots} f_{\lambda n}(t). \tag{4}$$

Wenn also in n parallelen Zweigen Ströme fließen, von denen je zwei aufeinanderfolgende eine Phasenverschiebung $\frac{T}{n}$ besitzen, so vereinigen sie sich in einem gemeinsamen Leiter zu einem Strome, der nur die n^{te}, $2n^{\text{te}}$, $3n^{\text{te}}\ldots$ Oberschwingung enthält.

Dieser Satz kann benutzt werden, um aus einer gegebenen Kurve die Amplituden der Oberschwingungen zu finden. Wir wollen uns dabei auf den praktisch wichtigen Fall beschränken, daß nur Oberschwingungen von ungeradzahliger Ordnung vorhanden sind, dann ist:

$$f_k(0) = b_k, \qquad f_k\left(\frac{T}{4}\right) = \pm a_k,$$

folglich

$$\varphi(0) = n \sum_{\lambda} b_{\lambda n}, \qquad \varphi\left(\frac{T}{4}\right) = n \sum_{\lambda} (\pm a_{\lambda n}).$$

Teilt man also das Intervall von $t = 0$ bis T in n Teile und bildet die Summe der Ordinaten in den Teilpunkten, so ist diese gleich:

$$\begin{array}{ll} 3(b_3 + b_9 + b_{15} + b_{21} + \cdots) & \text{für } n = 3, \\ 5(b_5 + b_{15} + \cdots) & \text{für } n = 5, \\ 7(b_7 + b_{21} + \cdots) & \text{für } n = 7, \\ 9(b_9 + \cdots) & \text{für } n = 9. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \end{array}$$

Wiederholt man dasselbe Verfahren für das Intervall $\frac{T}{4} \cdots \frac{5T}{4}$, so ergibt sich:

$$\begin{array}{ll} 3(-a_3 + a_9 - a_{15} + a_{21} - \cdots) & \text{für } n = 3, \\ 5(\ \ a_5 - a_{15} + \cdots) & \text{für } n = 5, \\ 7(-a_7 + a_{21} - \cdots) & \text{für } n = 7, \\ 9(\ \ a_9 - \cdots) & \text{für } n = 9, \end{array}$$

Beschränkt man sich auf die ersten Oberschwingungen, so ist

es leicht aus diesen Größen die Einzelwerte der a und b zu berechnen.

Diese von Tschebychef herrührende Methode (vgl. H. Bruns, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens, Leipzig 1903. B. G. Teuber, S. 130 u. ff.) ist von Fischer Hinnen in die Elektrotechnik eingeführt worden.[1])

12. Die Veränderung der Kurvenform durch Differentiieren und Integrieren. Als zweiter für Sinuskurven charakteristischer Satz war aufgestellt worden, daß eine sinusförmige Spannung, sofern kein Eisen vorhanden ist, stets sinusförmige Ströme erzeugt. Wir wollen jetzt das Verhalten einer Spannung von beliebiger Kurvenform:

$$(1) \quad v = \sum (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t)$$

Fig. 23.

untersuchen, wenn sie erstens an einen Kondensator C und zweitens an eine Selbstinduktion L gelegt wird. Der Ladestrom i des Kondensators gehorcht der Gleichung:

$$(2) \qquad i = C\frac{dv}{dt}$$

d. h.

$$(3) \qquad i = C\sum (k a_k \cos k\omega t - k b_k \sin k\omega t).$$

Der Ladestrom hat also eine andere Kurvenform als die Ladespannung, und zwar sind alle Oberschwingungen im Verhältnis ihrer Ordnungszahl vergrößert; d. h. je höher die Ordnungszahl der Oberschwingung ist, um so mehr wird sie verstärkt. Die Kurve des Ladestromes ist also gegen diejenige der Ladespannung stark verzerrt, und zwar ist die Verzerrung unabhängig von der Größe der Kapazität; oder Kondensatoren von verschiedener Kapazität geben, wenn sie von derselben Spannung erregt werden, ähnliche Stromkurven. Fig. 23 zeigt eine trapezförmige Ladespannung und den stark verzerrten Ladestrom für eine Kapazität von 1 Mf.

Andererseits mag die Spannung (1) durch eine Selbstinduktion L von verschwindend kleinem Widerstand geschlossen werden;

---

1) Vgl. E. T. Z. Bd. 22, S. 396. 1901 und des Verfassers Abhandlung im Archiv der Math. u. Phys. (3) 12, 230—240.

der Strom i, der zustande kommt, wird durch die Gleichung bestimmt:

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{4}$$

oder $i = \frac{1}{L}\int v\,dt$ d. h.

$$i = \frac{1}{L}\sum\left(-\frac{a_k}{k}\cos k\omega t + \frac{b_k}{k}\sin k\omega t\right). \tag{5}$$

Die Oberschwingungen des Stromes erscheinen also denjenigen der erzeugenden Spannung gegenüber im Verhältnis der Ordnungszahlen verkleinert, oder je höher die Ordnungszahl der Oberschwingung, um so stärker die Dämpfung ihrer Amplitude. Eine Spannung erzeugt in einer Selbstinduktivität einen Strom von einer Kurvenform, welche der Sinusform näher kommt als diejenige der Spannung, und zwar ist die entstehende Kurvenform des Stromes unabhängig von der Stärke der Selbstinduktion; wird eine Spannung durch parallel geschaltete Selbstinduktionen von verschiedener Größe geschlossen, so sind die in denselben entstehenden Ströme einander ähnlich.

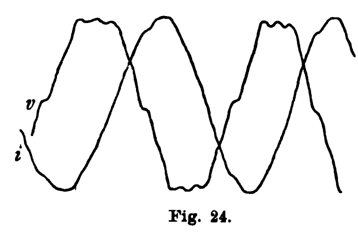


Fig. 24.

Diese Sätze gelten, wie gesagt, streng genommen nur, wenn der Widerstand der Rolle vernachlässigt werden kann. Ist das nicht der Fall, so treten Modifikationen ein. Fig. 24 zeigt den Strom in einer 1 Henryspule, wenn sie durch dieselbe Spannung, wie in Fig. 23, erregt wird.

13. Die Mittelwerte mehrwelliger Ströme. Wir gehen dazu über, die Mittelwerte mehrwelliger Ströme zu bilden. Am wichtigsten ist der Mittelwert aus dem Produkt zweier Ströme. Seien

$$i = \sum(a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t) = \sum c_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \tag{1}$$

und

$$i' = \sum(a_k' \sin k\omega t + b_k' \cos k\omega t) = \sum c_k' \sin(k\omega t + \gamma_k') \tag{2}$$

zwei beliebige Ströme.

Für die Mittelwertbildung bedenken wir, daß der Mittelwert aus dem Produkt zweier Sinusfunktionen von verschieden großer

Periodendauer Null ist (vgl. S. 10). Man braucht also in ii' nur diejenigen Faktoren zu berücksichtigen, welche sich aus zwei Gliedern der **gleichen** Ordnungszahl zusammensetzen. Auf diese Weise findet man:

$$(3)\qquad M(ii') = \sum \frac{1}{2}(a_k a_k' + b_k b_k') = \sum \frac{1}{2} c_k c_k' \cos(\gamma_k - \gamma_k').$$

Sind die beiden Ströme i und i' identisch gleich, so erhält man aus (3):

$$J^2 = M(i^2) = \sum \frac{1}{2}(a_k^2 + b_k^2) = \sum \frac{1}{2} c_k^2$$

und ebenso:

$$J'^2 = M(i'^2) = \sum \frac{1}{2}(a_k'^2 + b_k'^2) = \sum \frac{1}{2} c_k'^2.$$

Diese Gleichungen geben den Zusammenhang zwischen den Effektivwerten J bzw. J' von i bzw. i' und den Amplituden der Teilschwingungen dieser Ströme. Führt man statt der Amplituden der Teilschwingungen ihre Effektivwerte ein, so kommt man zu den Gleichungen:

$$(4)\qquad J^2 = \sum(A_k^2 + B_k^2) = \sum C_k^2$$

und

$$(5)\qquad M(ii') = \sum(A_k A_k' + B_k B_k') = \sum C_k C_k' \cos(\gamma_k - \gamma_k').$$

Wie man aus den Formeln ersieht, enthält die rechte Seite von $M(ii')$ die Effektivwerte J und J' nicht als Faktoren. In der Praxis ist es üblich, analog wie bei Sinusströmen:

$$(6)\qquad M(ii') = JJ' \cdot \varkappa$$

zu setzen; $\varkappa$ nennen wir den **Verschiebungsfaktor**. Ersetzt man J' durch eine Spannung V, so gelangt man zu einer Formel für die mittlere Leistung eines mehrwelligen Wechselstromes

$$(7)\qquad M(vi) = VJ \cdot \varkappa.$$

In diesem Falle heißt $\varkappa$ der **Leistungsfaktor**. Man darf aber nicht vergessen, daß die mathematischen Formeln diesen Ansatz **nicht** rechtfertigen. $\varkappa$ ist bei sinusförmigen Strömen von der Größe der Effektivwerte der Ströme unabhängig; bei beliebiger Kurvenform ist es dagegen von der Größe sämtlicher Teilamplituden in komplizierter Weise abhängig.

14. Form- und Scheitelfaktor. Die Mittelwerte $M(i^2)$ und $M(ii')$ sind praktisch von großer Wichtigkeit, weil sie verhältnismäßig leicht der Messung zugänglich sind. Über die Kurvenform sagen allerdings diese Mittelwerte nichts aus. Will man über die Kurvenform einen Anhaltspunkt haben, ohne zu einer vollständigen Kurvenaufnahme zu schreiten, so sucht man noch den Mittelwert aller Ströme, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, oder die Scheitelwerte. Freilich hat das nur eine Bedeutung, wenn die Kurve nicht viele Maxima und Minima innerhalb einer Periode besitzt, und wenn sie symmetrisch zur Abszissenachse liegt. Wir wollen unsere Betrachtungen auf diese Fälle beschränken. Sei also $M_{\frac{T}{2}}(i)$ der Mittelwert von i, genommen über diejenige Halbperiode, innerhalb welcher der Strom ganz oberhalb der Abszissenachse liegt.

Man pflegt den Quotienten aus Effektivwert und arithmetischem Mittelwert

$$f = \frac{J}{M_{\frac{T}{2}}(i)} \tag{1}$$

als Formfaktor der Stromkurve und das Verhältnis aus Höchstwert und Effektivwert

$$\sigma = \frac{i_{max}}{J} \tag{2}$$

als Scheitelfaktor zu bezeichnen.

Um über die Größe des Formfaktors etwas aussagen zu können, teilen wir eine Halbperiode in n Teile und nennen $i_1, i_2 \ldots i_n$ die Augenblickswerte der Stromstärke in den Teilpunkten.

Dann sei:

$$M = \frac{1}{n}(i_1 + i_2 + \cdots + i_n) = \frac{1}{n}\sum i_k$$

der arithmetische Mittelwert aus diesen n Strömen. Setzt man nun

$$i_k = M + \delta_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

so sind die δ die Abweichungen der Einzelwerte i vom Mittelwert, und es ist: $\sum \delta_k = 0$.

Für die Stromquadrate folgt:

$$\sum i_k^2 = nM^2 + 2M\sum \delta_k + \sum \delta_k^2.$$

Das zweite Glied der rechten Seite ist Null und das dritte ist positiv, folglich ist

$$\frac{1}{n}\sum i_k^2 \geqq M^2.$$

Geht man für unendlich großes n zur Grenze über, so wird aus dieser Ungleichung

$$J \geqq M. \tag{3}$$

D. h. der Effektivwert ist größer oder mindestens gleich dem arithmetischen Mittelwert über eine Halbperiode. Danach kann der Formfaktor f nicht kleiner als 1 sein. Die Abweichung ist um so größer, je größer die Absolutwerte von δ werden; d. h. da die δ die Abweichung vom Mittelwert bedeuten: je flacher die Kurve verläuft, um so mehr nähert sich der Formfaktor dem Wert 1, und umgekehrt, je spitzer die Kurvenform um so größer der Formfaktor.

Man kann den Formfaktor in Beziehung setzen zur Schwerpunktsordinate der Stromfläche. Ist F die Flächengröße, welche von einer Halbperiode und der Abszissenachse umschlossen wird, η die Schwerpunktsordinate dieser Fläche, so berechnet man η bekanntlich aus der Formel:

$$\eta \cdot F = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{T}{2}} i^2 dt,$$

und wenn man wieder den Effektivwert J einführt:

$$\eta F = \frac{T}{4} J^2.$$

Nun hängt aber die Fläche F mit dem arithmetischen Mittelwert über eine Halbperiode, wie man leicht sieht, durch die Gleichung zusammen:

$$F = \frac{T}{2} M_{\frac{T}{2}}.$$

Führt man dies in die vorige Gleichung ein, so erhält man für den Formfaktor:

$$f = \frac{J}{M_{\frac{T}{2}}} = \frac{2\eta}{J} = \sqrt{\frac{2\eta}{M_{\frac{T}{2}}}}. \tag{4}$$

Diese Formeln können zuweilen für die Berechnung des Formfaktors recht bequem sein.

15. Beispiele für die Berechnung von Form- und Scheitelfaktoren. In der folgenden Tabelle sind für einige der zum Teil schon früher betrachteten Kurven die Effektivwerte, Form- und Scheitelfaktoren ausgerechnet.

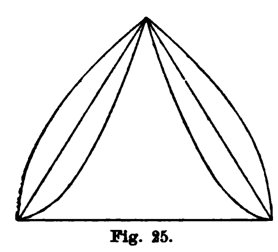


Fig. 25.

1. Sei $i = A\left(\frac{4}{T}\right)^n t^n$ für $0 \cdots \frac{T}{4}$

$$= A\left(\frac{4}{T}\right)^n\left(\frac{T}{2} - t\right) \text{ für } \frac{T}{4} \cdots \frac{T}{2}.$$

Der Effektivwert ist: $J_e = \frac{A}{\sqrt{2n+1}}$.

Die mittlere Stromstärke $M_{\frac{T}{2}}(i) = \frac{A}{n+1}$.

Der Höchstwert für $t = \frac{T}{4}$ ist A.

Folglich der Formfaktor $f = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}}$ und der Scheitelfaktor $\sigma = \sqrt{2n+1}$. Das ergibt

für $n = 0$:	$f = 1$,	$\sigma = 1$
$n = \frac{1}{2}$:	$f = 1{,}061$,	$\sigma = 1{,}414$
$n = 1$:	$f = 1{,}155$,	$\sigma = 1{,}732$
$n = 2$:	$f = 1{,}342$,	$\sigma = 2{,}236$.

Der Wert $n = 1$ entspricht einem gleichschenkligen Dreieck, $n = 0$ einem Rechteck.

Die Kurven für $n = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $n = 2$ sind in Fig. 25 dargestellt.

2. Gleichschenkliges Trapez; Bezeichnung wie auf S. 34.

$$J_e = a\sqrt{1 - \frac{4}{3}\alpha},$$

$$M_T(i) = a(1 - \alpha).$$

Mithin
$$f = \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\alpha}}{1 - \alpha}, \qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\alpha}},$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ gibt wieder ein gleichschenkliges Dreieck. Für $\alpha = \frac{1}{4}$ ist:

$$f = 1{,}089, \qquad \sigma = 1{,}225.$$

Die der Sinuskurve sich nahe anschmiegende Trapezkurve mit aufgesetztem Dreieck (s. Fig. 21) liefert die Faktoren

$$f = 1{,}113, \qquad \sigma = 1{,}489.$$

3. Ellipse und Parabel.

$$i = A\left\{t\left(\frac{T}{2} - t\right)\right\}^n \quad \text{für } t = 0 \cdots \frac{T}{2}.$$

Zur Berechnung der Mittelwerte braucht man die sog. Eulerschen Integrale:

$$B(p, q) = \int_0^1 z^{p-1}(1 - z)^{q-1} dz$$

und

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-z} z^{n-1} dz,$$

welche durch die Gleichung

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)},$$

miteinander zusammenhängen. Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen und der Beziehung $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ findet man leicht:

$$J_e = A\left(\frac{T}{2}\right)^{2n} \frac{\Gamma(2n + 1)}{\sqrt{\Gamma(4n + 2)}}$$

$$M_{\frac{T}{2}}(i) = A\left(\frac{T}{2}\right)^{2n} \frac{\Gamma(n + 1)^2}{\Gamma(2n + 2)},$$

und da $\Gamma(2n + 2) = (2n + 1)\,\Gamma(2n + 1)$ ist:

$$f = (2n + 1)\frac{\Gamma(2n + 1)^2}{\Gamma(n + 1)^2\sqrt{\Gamma(4n + 2)}}$$

$$i_m = A\left(\frac{T}{4}\right)^{2n}, \qquad \sigma = \frac{\sqrt{\Gamma(4n + 2)}}{4^n\,\Gamma(2n + 1)}.$$

$n = 1$ ergibt eine Parabel, $n = \frac{1}{2}$ eine Ellipse. Für die Form- und Scheitelfaktoren gelten folgende Werte:

n	f	σ
0,5	1,039	1,225
1	1,095	1,369
2	1,195	1,569

4. Modifizierte Sinuskurve $i = \sin^n \omega t$.

Um den Mittelwert $M(i^2)$ zu finden, setzt man in $B(p, q)$,

$$z = \sin^2 y, \qquad q = \frac{1}{2}, \qquad p = \frac{2n+1}{2}.$$

Dann erhält man

$$J_e = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\Gamma n + 1)}}, \quad M_{\frac{T}{2}}(i) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \quad i_m = 1$$

und daraus f und σ.

$n = 0$ entspricht einem Rechteck, $n = 1$ gibt eine einfache Sinuslinie. Für f und σ berechnen sich folgende Zahlenwerte:

n	f	σ
0	1	1
$\frac{1}{2}$	1,046	1,253
1	1,111	1,414
2	1,225	1,633

5. Bisher sind nur Stromkurven in Betracht gezogen worden, welche symmetrisch zur Abszissenachse und zur Ordinate $\frac{T}{4}$ bzw. $\frac{3T}{4}$ verlaufen. Man kann nun leicht die letztere Symmetrie aufheben, ohne den Formfaktor und Scheitelfaktor zu ändern[1]. Ist nämlich $i = f(t)$ die Gleichung der symmetrischen Kurve, so braucht man nur eine Kurve zu zeichnen nach den Gleichungen:

$$(1) \qquad i = f\left(\frac{T}{4}\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{für} \quad t = 0 \text{ bis } \tau$$

1) A. Russell, Altern. currents, Cambridge 1904, Bd. 1, S. 75.

und

(2) $$i = f\left(\frac{T}{4}\,\frac{T/2 - t}{T/2 - \tau}\right) \quad \text{für} \quad t = \tau \text{ bis } \frac{T}{2}.$$

Darin hat τ einen beliebigen zwischen 0 und $\frac{\tau}{2}$ liegenden Wert. Hat $f(t)$ für $t = \frac{T}{4}$ seinen Maximalwert $i_m = f\left(\frac{T}{4}\right)$, so wird durch die Gleichungen (1) und (2) eine Schar von Kurven dargestellt, welche unsymmetrisch verlaufen, aber alle denselben Höchstwert haben, und zwar für $t = \tau$.. Nun gibt eine einfache Transformation:

$$\frac{T}{2} J_e^2 = \int_0^{\tau} \left\{ f\left(\frac{T}{4}\,\frac{t}{\tau}\right)\right\}^2 dt + \int_{\tau}^{\frac{T}{2}} \left\{ f\left(\frac{T}{4}\,\frac{T/2 - t}{T/2 - \tau}\right)\right\}^2 dt$$

$$= \frac{4\tau}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t)^2 dt + \frac{4\left(\frac{T}{2} - \tau\right)}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t)^2 dt = \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)^2 dt.$$

D. h., der Effektivwert ist der gleiche wie bei der zu $T/4$ symmetrischen Kurve.

Genau derselbe Beweis gilt für die mittlere Stromstärke. Wird also eine beliebige zu $T/4$ bzw. $3\,T/4$ symmetrische Kurve durch Anwendung der Gleichungen (1) und (2) unsymmetrisch gemacht, so bleiben Höchstwert, Effektivwert, mittlere Stromstärke, Formfaktor und Scheitelfaktor ungeändert.

16. Die Phasenverschiebung mehrwelliger Ströme.

a) Die Phasenverschiebung bei gleicher Kurvenform zweier Ströme.

Für zwei Ströme mit gleicher Kurvenform ist der Begriff der Phasenverschiebung wohlbestimmt (vgl. S. 37). Sie ist gleich dem Betrag, um den man die eine Kurve gegen die andere parallel zur Abszissenachse verschieben muß, damit die Schnittpunkte mit den Abszissenachsen zusammenfallen und alle Maxima und Minima dieselben Ordinaten haben. Diese Phasenverschiebung kann durch die Methode der Schwebungen gemessen werden (s. S. 10).

Nun war andererseits der Begriff des „Verschiebungsfaktors" definiert worden durch:

(1) $$\varkappa = \frac{M(ii')}{J J'}$$

Für einwellige Ströme ist $\varkappa$ gleich dem Kosinus der Phasenverschiebung; es fragt sich, ob dieser Satz auch gültig bleibt, wenn die Kurvenform der beiden Ströme dieselbe, aber nicht sinusförmig ist. Wir setzen:

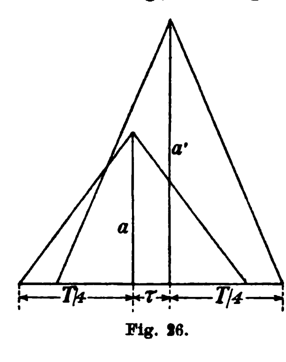


Fig. 26.

$$(2) \qquad \varkappa = \cos \Phi,$$

nennen Φ die effektive Phasenverschiebung und fragen, ob sie gleich der wirklichen ist.

Wir wollen ein Beispiel betrachten: Die beiden Kurven (Fig. 26) seien zwei gleichschenklige Dreiecke von den Höhen a und a'; die Höhen seien um den Betrag τ gegeneinander verschoben. Da die Kurvenhälften symmetrisch sind, so brauchen wir die Mittelwerte nur über die halbe Periodendauer auszudehnen. Und zwar ist für

$$0 \cdots \frac{T}{4} \qquad i = \frac{4a}{T}t, \qquad i' = \frac{4a'}{T}(t - \tau)$$

$$\frac{T}{4} \cdots \frac{T}{4} + \tau \qquad i = \frac{4a}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right), \quad i' = \frac{4a'}{T}(t - \tau)$$

$$\frac{T}{4} + \tau \cdots \frac{T}{2} \qquad i = \frac{4a}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right), \quad i' = \frac{4a'}{T}\left(\frac{T}{2} + \tau - t\right).$$

Hieraus ergibt sich durch einfache Integration für $\tau = 0 \cdots \frac{T}{4}$ der Mittelwert:

$$M(ii') = \frac{1}{3} a a' \left\{1 - \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4\tau}{T}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4\tau}{T}\right)^3\right\}.$$

$\tau = 0$ und $a = a'$ ergibt:

$$J^2 = \frac{1}{3}a^2, \qquad J'^2 = \frac{1}{3}a'^2,$$

folglich

$$\cos \Phi = 1 - \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha^3,$$

wo $\alpha = \left(\frac{4}{T}\right)\tau$ ist. $\frac{T}{4}$ entspricht dem Phasenwinkel 90^0; soll also τ z. B. dem Winkel 10^0 entsprechen, so ist $\alpha = \frac{1}{9}$ zu setzen.

Wird nun die wirkliche Phasenverschiebung mit φ bezeichnet, so ergibt sich als zusammengehörig:

$\varphi = 0^0$	10^0	20^0	30^0	40^0
$\Phi = 0^0$	$32^0 55'$	$46^0 16'$	$56^0 15'$	$64^0 24'$
$\varphi = 50^0$	60^0	70^0	80^0	90^0
$\Phi = 71^0 17'$	$77^0 10'$	$82^0 12'$	$86^0 27'$	90^0.

Die Differenzen zwischen wirklicher und effektiver Phasenverschiebung können aber sehr beträchtlich sein.

Nur für 0^0 und 90^0 stimmen φ und Φ miteinander überein. Dieses Resultat gilt bei Strömen gleicher Kurvenform ganz allgemein, wie aus den Fourierschen folgt. Es sei nämlich:

$$i = \sum_0^\infty i_k \sin(k\omega t + \gamma_k). \tag{3}$$

Dann ist die Gleichung einer ähnlichen Kurve, die um den Winkel φ gegen i verschoben ist (vgl. § 10, S. 37):

$$i' = \lambda \sum i_k \sin(k\omega t + \gamma_k + k\varphi) \tag{4}$$

folglich:

$$M(ii') = \frac{1}{2} \lambda \sum i_k^2 \cos k\varphi$$

$$M(i^2) = \frac{1}{2} \sum i_k^2$$

$$M(i'^2) = \frac{1}{2} \lambda^2 \sum i_k^2$$

und

$$\cos \Phi = \frac{\Sigma i_k^2 \cos k\varphi}{\Sigma i_k^2}. \tag{5}$$

Gleichung (5) gibt allgemein die Beziehung zwischen wirklicher und effektiver Phasenverschiebung. Aus $\varphi = 0$ folgt $\Phi = 0$, und aus $\varphi = \frac{\pi}{2}$ folgt $\Phi = \frac{\pi}{2}$ (k ungerade).

Setzt man dagegen z. B. $\varphi = \frac{\pi}{3} = (60^0)$, so wird:

$$\cos \Phi = \frac{\frac{1}{2} i_1^2 - i_3^2 + \frac{1}{2} i_5^2 + \cdots}{i_1^2 + i_3^2 + i_5^2 + \cdots} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{i_3^2 + i_9^2 + \cdots}{i_1^2 + i_3^2 + \cdots}$$

d. h.

$$\Phi \geqq \frac{\pi}{3}.$$

b) Die Phasenverschiebung bei symmetrischer Kurvenform zweier Ströme.

Sind die beiden Stromkurven nicht mehr einander gleich, so kann immerhin noch von einer wirklichen Phasenverschiebung gesprochen werden, wenn die Kurven zwar voneinander verschieden sind, aber beide symmetrisch zu je einer Ordinate verlaufen (s. z. B. Fig. 25). Man sagt: die wirkliche Phasenverschiebung ist Null, wenn diese Symmetrieachsen zusammenfallen. Legen wir letztere in die Ordinate $\frac{T}{4}$, so sind die die Kurven darstellenden Funktionen offenbar ungerade, d. h. $f(t) = -f(-t)$; beide Stromkurven enthalten nur Sinusglieder; sie sind also bei Phasengleichheit darstellbar in der Form:

$$a = \sum a_k \sin k\omega t, \qquad b = \sum b_k \sin k\omega t. \tag{6}$$

Wird der Strom b um den Winkel φ aus der Lage, welche der Phasenverschiebung Null entspricht, herausgeführt, so wird seine Gleichung:

$$b_\varphi = \sum b_k \sin(k\omega t + k\varphi).$$

Daraus folgt der Mittelwert

$$M(a b_\varphi) = \frac{1}{2} \sum a_k b_k \cos k\varphi$$

und die effektive Phasenverschiebung

$$\cos \Phi = \frac{\frac{1}{2} \Sigma a_k b_k \cos k\varphi}{A\ B}. \tag{7}$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist, da die k nur ungerade Werte haben, $\cos \Phi = 0$, $\Phi = \frac{\pi}{2}$; der wirklichen Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$ entspricht also auch die effektive $\frac{\pi}{2}$.

Setzt man dagegen $\varphi = 0$, so wird $\cos \Phi \neq 1$. Während also bei gleicher Kurvenform für $\varphi = 0$ und $\pm \frac{\pi}{2}$ die wirkliche Phasenverschiebung mit der effektiven übereinstimmt, ist

dies bei verschiedenen Kurvenformen, die aber symmetrisch zu einer Ordinate verlaufen, nur noch für $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ der Fall.

Besonders einfach werden die Verhältnisse, wenn man eine beliebig geformte, symmetrische Kurve

$$a_\varphi = \sum a_k \sin(k\omega t + k\varphi)$$

mit einer Sinuslinie $s = s_m \sin \omega t$ kombiniert. Hierfür wird:

$$\cos \Phi = \frac{a_1 \cos \varphi}{A\sqrt{2}}. \tag{8}$$

In diesem Falle erhält der Effektivwert Φ für $\varphi = 0$ ein Minimum Φ_m, das durch

$$\cos \Phi_m = \frac{a_1}{A\sqrt{2}} = \left(1 + \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{a_5}{a_1}\right)^2 + \cdots\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

definiert ist; Φ_m kann als ein Maß für die Abweichung der Kurve a von der Sinuslinie angesehen werden. Die wirkliche Phasenverschiebung von a und s berechnet man nach Gleichung (8) und (9) aus

$$\cos \varphi = \frac{\cos \Phi}{\cos \Phi_m}. \tag{10}$$

Die folgende Tabelle gibt für einige Kurven die Werte von $\cos \Phi_m$ bzw. Φ_m.

Kurvenform	$\cos \Phi_m$	Φ_m
gleichschenkl. Dreieck	0,9927	6° 55′
Trapez $\left(\alpha = \frac{1}{4}\right)$. .	0,9928	6° 54′
Rechteck	0,9544	25° 48′
Parabel	0,9993	2° 10′
Polygon Fig. 21 . .	0,9997	1° 25′

Die Einführung des Minimalwinkels Φ_m hat keine Bedeutung mehr, wenn statt s die beliebige symmetrische Kurve b (Formel (6)) gesetzt wird. Die Formel (10) ist dann nicht mehr brauchbar. Ja, in diesem Falle kann der Mittelwert $M(ab)$ für die wirkliche Phasenverschiebung $\varphi = 0$ nicht einen Maximalwert, sondern einen

Minimalwert[1]) annehmen. Dies soll an einem Beispiel klar gemacht werden. Sei:

$$(11)\qquad \begin{aligned} a &= 2\sin\omega t + \sin 3\omega t, \\ b_\varphi &= 2\sin(\omega t + \varphi) - \sin(3\omega t + 3\varphi). \end{aligned}$$

Dann ist

$$(12)\qquad M(ab_\varphi) = \frac{1}{2}(4\cos\varphi - \cos 3\varphi).$$

Der Phasenverschiebung

$$\varphi = 0$$

entspricht der Wert

$$M_0 = 1{,}5.$$

Den Maximalwert von $M(ab)$ erhält man dagegen aus $\partial M/\partial\varphi = 0$, d. h.

$$4\sin\varphi = 3\sin 3\varphi, \qquad \cos\varphi = \sqrt{\frac{7}{12}}, \qquad \varphi = \pm 40^0 12'.$$

Während also $M(ab)$ für $\varphi = 0$ ein Minimum M_0 besitzt, steigt es für positive und negative Phasenverschiebungen an und erhält für $\varphi = \pm 40^0 12'$ seinen Maximalwert

$$M = \frac{7}{3}\sqrt{\frac{7}{12}} = 1{,}78.$$

Bei weiterem Wachsen von φ über $40^0 12'$ hinaus nimmt dann M wieder ab, bis es bei $\varphi = \pm 90^0$ zu Null wird.

c) Die Phasenverschiebung bei unsymmetrischer Kurvenform zweier Ströme.

Sind zwei Stromkurven verschieden geformt und auch nicht symmetrisch zu einer Ordinate, so bietet der Begriff der wirklichen Phasenverschiebung eine gewisse Schwierigkeit. Diese liegt offenbar in der Definition derjenigen gegenseitigen Lage beider Kurven, welcher man die Phasenverschiebung Null zuschreiben will, d. h. gewissermaßen des Anfangspunktes der Phasenverschiebung. Hat man hierfür eine befriedigende Definition gefunden, so braucht man bei einer anderen gegenseitigen Lage der Kurven nur die Strecke τ zu bestimmen, um welche die eine Kurve auf der Abszissenachse gegen die andere verschoben werden muß, um in die Lage der Phasenverschiebung „Null" einzurücken; $\tau/T \times 360^0$ ist dann die wirkliche Phasenverschiebung.

---

1) Natürlich ist das nur ein Teilminimum.

Um nun zu einer Definition des Anfangspunktes zu kommen, sollen erst einige allgemeine Betrachtungen über die effektive Phasenverschiebung eingeschaltet werden. Die effektive Phasenverschiebung ist, wie früher, durch die Gleichung

$$\cos \Phi = \varkappa = \frac{M(a \cdot b)}{\sqrt{M(a^2) \cdot M(b^2)}} \tag{13}$$

definiert. Es sei noch einmal daran erinnert, daß die durch diese Definition festgesetzte Größe Φ sehr willkürlich ist und mit dem ursprünglichen Begriff der Phasenverschiebung nichts zu tun hat.

Um nun zu untersuchen, welche Werte $\varkappa$ annehmen kann, wollen wir uns die Mittelwerte als die Grenzwerte von Summen mit endlicher Gliederzahl aufschreiben. Teilt man eine Abszissenlänge, die einer Periodendauer gleich ist, in n Teile und nennt

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n,$$
$$b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$$

die zugehörigen Ordinaten der beiden Wellen, so ist:

$$\varkappa = \lim \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}}.$$

Eine einfache Transformation ergibt:

$$1 - \varkappa^2 = \lim \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + \cdots}{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots)}. \tag{14}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen nur positive Größen, also ist: $\varkappa^2 \leqq 1$.

Der Grenzwert 1 kann nur erreicht werden, wenn

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \quad \text{d. h.} \quad a = \text{Const.}\ b$$

ist. $\varkappa$ kann also nur dann gleich 1 werden, wenn die beiden Ströme gleiche Kurvenform haben; in allen anderen Fällen bleibt es kleiner als 1, d. h. der Wert der effektiven Phasenverschiebung $\Phi = 0$ wird dann nicht erreicht.

Wir wollen andrerseits untersuchen, ob der Wert $\varkappa = 0$ möglich ist, und uns hierbei auf den praktisch wichtigsten Fall beschränken, daß die Stromkurven symmetrisch zur Abszissenachse verlaufen. Wenn $a = f(t)$, $b = g(t)$ ist, so ist:

$$\varkappa_0 = \frac{M(f(t)\, g(t))}{A \cdot B}.$$

Nun ist

$$g\left(t+\frac{T}{2}\right)=-g(t).$$

Wenn man also die Kurve $g(t)$ um eine halbe Wellenlänge verschiebt, so wird der zugehörige Verschiebungsfaktor:

$$\varkappa_{T/2}=\frac{M\left[f(t)g\left(t+\frac{T}{2}\right)\right]}{AB}=-\varkappa_0.$$

Hat man es also mit stetig verlaufenden Stromkurven zu tun, so muß sich auch $\varkappa$ stetig ändern, wenn man die Phase in $g(t)$ von 0 bis $\frac{T}{2}$ ändert. Es muß daher einen zwischen 0 und $\frac{T}{2}$ liegenden Wert τ_1 der Phasenverschiebung geben, für welchen

$$M(f(t)g(t+\tau_1))=0,\quad \varkappa_{\tau_1}=0,\quad \Phi_{\tau_1}=\frac{\pi}{2}$$

wird.

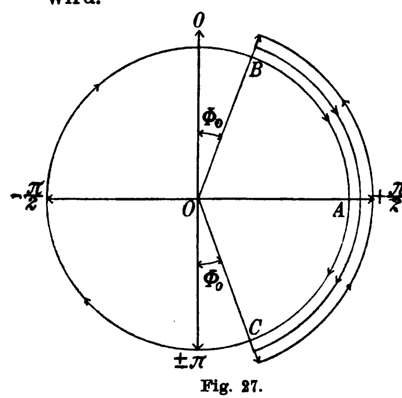


Fig. 27.

Hat man diese gegenseitige Lage der Kurven $f(t)$ und $g(t)$ gefunden, so kann man $f(t)$ oder $g(t)$ um eine halbe Wellenlänge nach vorwärts oder rückwärts schieben und wird dann die Kurven wieder in eine Lage gebracht haben, für welche $\varkappa=0$ ist.

Wir gehen nun von einer solchen Lage $\varkappa=0$, $\Phi=\frac{\pi}{2}$ aus, und stellen die Phasenverschiebung $\Phi=\frac{\pi}{2}$ in einem Diagramm Fig. 27 durch den Vektor OA dar. Nunmehr wird $f(t)$ festgehalten und $g(t)$, ohne die Kurvenform zu ändern, gegen $f(t)$ verschoben. Mag $\varkappa$ zunächst positive Werte annehmen, so nimmt Φ allmählich ab, bis ein Minimalwert Φ_0 erreicht wird, der nicht gleich Null ist; dieser Lage entspricht der Vektor OB.

Die effektive Phasenverschiebung kann also bei weiterem Verschieben der Kurven nicht negative Werte annehmen, wie es bei gleicher Kurvenform sein würde, sondern sie wächst wieder

von Φ_0 auf $\frac{\pi}{2}$; letzterer Wert wird erreicht, wenn $g(t)$ um eine halbe Wellenlänge verschoben ist. Darüber hinaus wächst Φ weiter bis auf $\pi - \Phi_0$ (Vektor OC), erreicht aber wiederum nicht den Wert π, sondern kehrt auf $\frac{\pi}{2}$ zurück. Während also die Kurven um eine volle Wellenlänge verschoben werden, wächst die effektive Phasenverschiebung nicht in einer Richtung um 2π, sondern pendelt zwischen den Grenzwerten Φ_0 und $\pi - \Phi_0$ hin und her.

Die allgemeine Formel für den Verschiebungsfaktor erhält man aus

$$f(t) = \sum a_k \sin(k\omega t + \alpha_k), \tag{15}$$

$$g(t) = \sum b_k \sin(k\omega t + \beta_k). \tag{16}$$

Wird $g(t)$ um den Betrag τ verschoben, so wird

$$g(t + \tau) = \sum b_k \sin(k\omega t + k\varphi + \beta_k),$$

wo

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

ist.

$$M(f(t)g(t + \tau)) = \frac{1}{2}\sum a_k b_k \cos(k\varphi + \beta_k - \alpha_k),$$

$$\varkappa_\varphi = \frac{\frac{1}{2}\sum a_k b_k \cos(k\varphi + \beta_k - \alpha_k)}{A . B}. \tag{17}$$

Betrachtet man also den Verschiebungsfaktor als Funktion von φ, so sieht man, daß er als eine Fouriersche Reihe darstellbar ist; d. h. $\varkappa_\varphi$ kann eine beliebige periodische Funktion von φ sein. Eine gewisse Einschränkung erfährt allerdings die Willkür durch die Konvergenzbedingungen. Würde man z. B. die Bedingung stellen, daß $\varkappa_\varphi$ durch eine Rechteckskurve dargestellt wird, so ist damit das Produkt $a_k b_k$ nach Formel (19) S. 35 gegeben. Diese Produkte kann man aber nicht in zwei Faktoren a_k und b_k zerlegen, so daß auch die mit a_k bzw. b_k gebildeten Einzelreihen konvergieren.

Wir kehren nunmehr zu der Aufgabe zurück, einen Anfangspunkt für die wirkliche Phasenverschiebung von zwei beliebigen Stromkurven zu definieren.

Die bisherigen Betrachtungen haben ergeben, daß am besten

diejenigen Lagen der Kurven definiert sind, für welche $M(ab) = 0$ ist. Man kann diese Eigenschaft benutzen, um die gewünschte Definition zu geben. Schreibt man nämlich der $M(ab) = 0$ entsprechenden Lage die wirkliche Phasenverschiebung 90^0 zu, so hat man a oder b aus dieser Lage um eine halbe Periode zu verschieben, um den beiden Kurven die der wirklichen Phasenverschiebung Null entsprechende Lage zu geben.

Eine solche Definition ist durchaus möglich und durchführbar, krankt aber an zwei Übelständen:

1. Die experimentelle Bestimmung der wirklichen Phasenverschiebung würde sehr umständlich und zeitraubend sein; sie ist nur durch Kurvenaufnahmen und Analysen der Kurven zu gewinnen.

2. Die Definition versagt, sobald man es mit mehr als zwei Kurven zu tun hat. Um letzteres zu zeigen, fügen wir zu den Kurven a und b als dritte Kurve noch eine Sinuslinie hinzu, die die Gleichung

$$s = s_1 \sin \omega t$$

habe. a, b und s mögen so zueinander liegen, daß die effektive Phasenverschiebung von a und s, und von b und s, 90^0 beträgt: d. h.

$$\Phi_{as} = 0, \qquad \Phi_{bs} = 0,$$

folglich muß:

$$a_1 s_1 \cos \alpha_1 = 0, \quad b_1 s_1 \cos \beta_1 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_1 = \frac{\pi}{2}$$

sein. Wenn also a und b die Form haben:

$$a = a_1 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{k=3}^{\infty} a_k \sin (k\omega t + \alpha_k),$$

$$b = b_1 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{k=3}^{\infty} b_k \sin (k\omega t + \beta_k),$$

so ist nach der obigen Definition auch die wahre Phasenverschiebung zwischen a und s und zwischen b und s je 90^0. Wenn es nun überhaupt einen Sinn haben soll, von einer wahren Phasenverschiebung zu reden, so müßte nunmehr a und b in dieser

gegenseitigen Lage die wahre Phasenverschiebung Null haben, d. h. wird z. B. b um eine halbe Wellenlänge gegen a verschoben, so müßte $M(ab_{\frac{T}{2}}) = 0$ sein. Die Ausrechnung ergibt aber:

$$M(ab_{\frac{T}{2}}) = \frac{1}{2} a_3 b_3 \cos\left(3\frac{\pi}{2} + \beta_3 - \alpha_3\right) + \cdots,$$

was offenbar durchaus nicht zu verschwinden braucht, weil die $a_3, b_3, \alpha_3, \beta_3, \ldots$ vollständig willkürlich sind.

Wir kommen also zu dem Schluß, daß die oben gegebene Definition eines Anfangspunktes der Phasenverschiebung nicht haltbar ist. Der Grund läßt sich kurz so ausdrücken: Sind a, b, c drei Stromkurven, so mögen a und b durch Verschieben auf der Abszissenachse in eine solche Lage zu c gebracht werden, daß (ac) und (bc) nach der obigen Definition die wirkliche Phasenverschiebung Null besitzen. Dann entspricht diese gegenseitige Lage von a und b im allgemeinen nicht der nach derselben Definition gegebenen Phasenverschiebung Null von a und b.

Diese Eigenschaft würde natürlich auch bei jeder anderen Definition eines Anfangspunktes der Phasenverschiebung hervortreten. Man kommt somit zu dem Schluß, daß es bei Kurven ganz beliebiger Form keinen Sinn mehr hat, von einer wirklichen Phasenverschiebung zu reden.

Die im vorletzten Abschnitt geforderte Eigenschaft wird natürlich auch von den effektiven Phasenverschiebungen nicht erfüllt. Wir wollen nach dem Vorgang von Russell[1]) den Beweis führen, daß die effektiven Phasenverschiebungen Φ_α, Φ_β, Φ_γ zwischen den Strömen a, b, c im allgemeinen nicht die Gleichung

$$\Phi_\alpha = \pm\,\Phi_\beta \pm \Phi_\gamma$$

erfüllen.

Teilt man eine Periode in n gleiche Teile und nennt die Ordinaten in den Teilpunkten

$x_1, x_2, \ldots x_n$ für die Kurve a,

$y_1, y_2, \ldots y_n$ „ „ „ b,

$z_1, z_2, \ldots z_n$ „ „ „ c,

1) A. Russell a. a. O. Bd. 1. S. 182.

so setzen wir zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
A &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,\\
B &= y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,\\
C &= z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2,\\
\xi &= (y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots + y_n z_n),\\
\eta &= (z_1 x_1 + z_2 x_2 + \cdots + z_n x_n),\\
\zeta &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n).
\end{aligned}$$

Dann ist:

$$\cos^2 \Phi_\alpha = \frac{\xi^2}{B \cdot C}, \quad \cos^2 \Phi_\beta = \frac{\eta^2}{C \cdot A}, \quad \cos^2 \Phi_\gamma = \frac{\zeta^2}{A \cdot B}.$$

Folglich ist:

$$1 - \cos^2 \Phi_\alpha - \cos^2 \Phi_\beta - \cos^2 \Phi_\gamma + 2 \cos \Phi_\alpha \cos \Phi_\beta \cos \Phi_\gamma = \\ = \frac{ABC - \xi^2 A - \eta^2 B - \zeta^2 C + 2\xi\eta\zeta}{ABC}.$$

Die linke Seite läßt sich nach Euler umformen in:

$$[\cos \Phi_\gamma - \cos(\Phi_\alpha + \Phi_\beta)][\cos(\Phi_\alpha - \Phi_\beta) - \cos \Phi_\gamma] = \\ = 4 \sin \frac{1}{2}(\Phi_\alpha + \Phi_\beta + \Phi_\gamma) \sin \frac{1}{2}(\Phi_\beta + \Phi_\gamma - \Phi_\alpha), \\ \sin \frac{1}{2}(\Phi_\alpha + \Phi_\gamma - \Phi_\beta) \sin \frac{1}{2}(\Phi_\alpha + \Phi_\beta - \Phi_\gamma).$$

Der Zähler der rechten Seite ist gleich:

$$\frac{1}{A}\{(AB - \zeta^2)(AC - \eta^2) - (A\xi - \eta\zeta)^2\}.$$

Weiter ist aber:

$$\begin{aligned}
AB - \zeta^2 &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + \cdots,\\
AC - \eta^2 &= (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 z_3 - x_3 z_1)^2 + \cdots,\\
A\xi - \eta\zeta &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)(x_1 z_2 - x_2 z_1)\\
&\quad + (x_1 y_3 - x_3 y_1)(x_1 z_3 - x_3 z_1) + \cdots,
\end{aligned}$$

und da allgemein

$$(P^2 + Q^2 + \cdots)(p^2 + q^2 + \cdots) \geqq (Pp + Qq + \cdots)^2$$

ist, so ist auch der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung $\geqq 0$.[1])

Von den vier Sinus in dem Produkt auf der linken Seite der Gleichung müssen also entweder alle vier positiv sein, oder zwei positiv und zwei negativ, oder alle vier negativ. Für die weitere Diskussion ist nun zu berücksichtigen, daß die effektiven Phasenverschiebungen stets zwischen 0 und π liegen.

Sind also alle Sinus positiv, so muß

$$0 < \Phi_\alpha + \Phi_\beta + \Phi_\gamma \leqq 2\pi$$

und

$$\Phi_\alpha < \Phi_\beta + \Phi_\gamma, \quad \Phi_\beta < \Phi_\gamma + \Phi_\alpha, \quad \Phi_\gamma < \Phi_\alpha + \Phi_\beta$$

sein.

Wäre andererseits der erste und zweite Faktor negativ, so müßte

$$2\pi < \Phi_\alpha + \Phi_\beta + \Phi_\gamma < 3\pi$$

und

$$-\pi < \Phi_\beta + \Phi_\gamma - \Phi_\alpha < 0$$

sein, d. h.

$$\pi < \Phi_\alpha < 2\pi.$$

Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß Φ_α zwischen 0 und π liegen soll. Aus demselben Grunde ist es unmöglich, daß alle vier Sinus negativ sind. Es bleibt also nur die erste Möglichkeit übrig, aus der der Schluß folgt, daß die Summe der drei effektiven Phasenverschiebungen kleiner als vier Rechte ist, und die Summe von je zweien niemals kleiner ist als der dritte.

17. Die Darstellung mehrwelliger Ströme durch Diagramme. Die Darstellung von Wechselstromproblemen durch Diagramme bietet so viel Vorteile und wird in der Praxis derartig häufig angewandt, daß wir uns die Frage vorlegen müssen: wie hat man Diagramme bei beliebiger Kurvenform anzusetzen, und unter welchen Bedingungen sind sie als genau anzusehen?

Wir wollen bei beliebiger Kurvenform Diagramme unter zwei Voraussetzungen zu konstruieren suchen, die man nicht aufgeben kann[2]).

---

1) Dies folgt auch schon daraus, daß der in Rede stehende Ausdruck das Volumen eines Quaders mit Kanten gleich der Längeneinheit darstellt.

2) s. E. T. Z. 1903, S. 59.

1. Die Länge eines Vektors wird dem Effektivwert der Wechselgröße gleich gemacht, welche er darstellen soll.

2. Besteht zwischen den Augenblickswerten a, b, c von drei Wechselströmen die Beziehung

$$c = a + b,$$

so ist der Vektor C als Diagonale des Parallelogrammes aus A und B darzustellen.

Diese Festsetzungen genügen, um zu berechnen, welche Bedeutung im Diagramm der Winkel Φ zwischen zwei Vektoren A und B hat. Aus dem Dreieck MPR (Fig. 28) folgt:

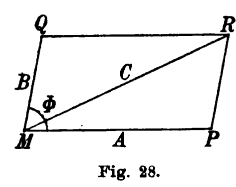


Fig. 28.

$$\cos \Phi = \frac{C^2 - A^2 - B^2}{2AB}.$$

Nun ist aber:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

und, wenn man die Mittelwerte bildet:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2M(ab);$$

dies eingesetzt, ergibt:

$$\cos \Phi = \frac{M(ab)}{A.B}. \tag{1}$$

Der Winkel Φ im Diagramm wird also nach der Definition auf S. 52 gleich der effektiven Phasenverschiebung der Ströme, welche durch die Schenkel des Winkels im Diagramm dargestellt werden. Die zweite der oben aufgeführten Voraussetzungen ist damit identisch, daß man zwei Vektoren unter einem Winkel aneinander zu setzen hat, der ihrer effektiven Phasenverschiebung gleich ist. Damit wird aber überhaupt die Möglichkeit der Darstellung eines allgemeinen Wechselstromproblems durch ein Diagramm in einer Ebene hinfällig. Denn wenn Φ_{ab}, Φ_{bc}, Φ_{ca} die effektiven Phasenverschiebungen zwischen drei Strömen a, b, c bedeuten, so ist im allgemeinen, wie wir sahen (S. 63),

$$\Phi_{ab} + \Phi_{bc} \geqq \Phi_{ac}.$$

Die bisherigen Betrachtungen genügen aber auch vollständig, um die Bedingung anzugeben, unter der drei Ströme durch drei Vektoren, die in einer Ebene liegen, dargestellt werden können.

Um diese Bedingung zu finden, erinnern wir uns daran, daß die effektive Phasenverschiebung zwischen zwei mehrwelligen

Strömen nur dann gleich Null werden kann, wenn sie ähnliche Kurvenformen haben. Zwei Ströme mit verschiedenen Kurvenformen können also, gleichgültig wie sie zeitlich zueinander liegen, nie durch zwei in dieselbe Richtung fallende Vektoren dargestellt werden. Und umgekehrt: zwei Ströme, welche durch zwei in dieselbe Richtung fallende Vektoren dargestellt sind, müssen die gleiche Kurvenform haben.

Wird also ein Strom mit dem Augenblickswert a durch einen Vektor OP dargestellt, so ist der Augenblickswert eines Stromes, der durch einen in dieselbe Richtung fallenden Vektor OP' dargestellt wird, gleich Const $\cdot\, a$ zu setzen.

Mit Hilfe dieses Satzes ist es nun leicht, die Bedingung dafür aufzustellen, daß drei Ströme durch drei in einer Ebene liegende Vektoren dargestellt werden können. Seien a, b, c die Augenblickswerte der drei Ströme, von denen wir voraussetzen wollen, daß ihre Vektoren in einer Ebene liegen. OP, OQ, OR seien diese drei Vektoren; zieht man durch R Parallele zu OQ und OP, welche die anderen beiden Vektoren in P' und Q' treffen, so ist

$$\text{Vektor } OR = \text{Vektor } OP' + \text{Vektor } OQ'$$

Vektor OP' habe den Augenblickswert pa,

Vektor OQ' „ „ „ qb,

wo p und q zwei Konstante sein müssen. Folglich ist:

$$c = pa + qb \tag{2}$$

die gesuchte Bedingung. D. h. drei mehrwellige Ströme lassen sich dann und nur dann durch Vektoren, die in derselben Ebene liegen, darstellen, wenn zwischen ihren Augenblickswerten eine homogene lineare Gleichung besteht.

Besteht keine derartige Gleichung zwischen a, b, c, so ist eine geometrische Darstellung nur möglich, indem man aus der Ebene heraustritt und die drei Vektoren A, B, C im Raume unter den Winkeln Φ_{ab}, Φ_{bc}, Φ_{ca} aneinandersetzt. Daß ein derartiges Aneinanderfügen im Raum stets möglich ist, folgt unmittelbar aus dem auf S. 63 abgeleiteten Satze über die effektiven Phasenverschiebungen.

Fügt man nun noch einen vierten Strom d hinzu, so kann

derselbe im Raumdiagramm A, B, C offenbar nur dann dargestellt werden, wenn der Augenblickswert d in der Form

$$d = pa + qb + rc \tag{3}$$

dargestellt werden kann, wo p, q, r Konstanten sind. D ist dann die Diagonale des Parallelipeds aus den Kanten pA, qB, rC. Ist dagegen die Gleichung (3) nicht erfüllt, so gibt es für d keine Darstellung im Raum. Hat man nämlich drei Vektoren von den Längen A, B, C unter den Winkeln Φ_{ab}, Φ_{bc}, Φ_{ca} im Raum zusammengefügt, so kann man einen Vektor von der Länge D so konstruieren, daß er mit A und B die Winkel Φ_{ad} und Φ_{bd} bildet. Damit ist aber seine Lage bestimmt, und der Winkel zwischen C und D braucht im allgemeinen nicht mit der berechneten effektiven Phasenverschiebung Φ_{cd} übereinzustimmen.

Wir kommen also zu dem Schluß: selbst unter Zuhilfenahme des Raumes ist bei mehrwelligen Strömen eine allgemein gültige exakte Darstellung durch ein Diagramm nicht möglich. Wenn man trotzdem in diesen Fällen Diagramme zeichnet, so können sie die wirklichen Verhältnisse nur angenähert darstellen. Der Wert dieser angenäherten Darstellungen ist aber vornehmlich wegen der Anschaulichkeit immer noch so groß, daß man sie in der Praxis nicht entbehren kann.

18. Schein-, Leistungs- und Querwiderstand. In nahem Zusammenhang mit der geometrischen Darstellung eines Wechselstromkreises durch ein Diagramm stehen Definitionen, die in der Praxis häufig gebraucht werden.[1]) Diese Definitionen, von denen im folgenden die Rede sein soll, stützen sich auf die drei Größen, die verhältnismäßig leicht an einem Wechselstromkreise gemessen werden können, der effektiven Spannung V, der effektiven Stromstärke J und der mittleren Leistung P. Man bildet:

$$s = \frac{V}{J} \tag{1}$$

und nennt s den Scheinwiderstand des Wechselstromkreises. Ferner wird:

$$r = \frac{P}{J^2} \tag{2}$$

1) Vgl. E. T. Z. 1909 S. 861. Neuerdings ist die Bezeichnung „Querwiderstand" bemängelt worden (E. T. Z. 1911, S. 480); ein anderer Vorschlag ist aber noch nicht gemacht.



der **Leistungswiderstand** und

$$q = \pm\sqrt{s^2 - r^2} \tag{3}$$

der **Querwiderstand** genannt.

Diese drei Größen s, r und q lassen sich aus den Formeln (1)—(3) stets berechnen, mag die Belastung so kompliziert zusammengesetzt sein, wie sie wolle; die Kurvenformen können ganz beliebig sein. Es sei noch besonders hervorgehoben, daß in nur ganz wenigen Sonderfällen r mit dem Ohmischen Widerstand des Kreises identisch ist.

Bedeutet φ die effektive Phasenverschiebung, so ist:

$$P = VJ\cos\Phi, \quad rJ = V\cos\Phi \tag{4}$$

zu setzen. Die Definitionen kommen also darauf hinaus, daß man einen Vektor von der Länge $V = sJ$ (Fig. 29) in die aufeinander senkrechten Komponenten rJ und qJ zerlegt, wobei die Kathete rJ mit V den Winkel Φ bildet.

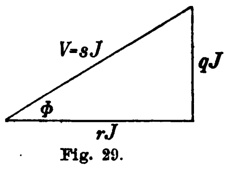


Fig. 29.

In einfachen Fällen kann man leicht die Größen s, r, q aus den Eigenschaften des Stromkreises berechnen. Wenn z. B. eine sinusförmige Spannung an eine Spule vom Ohmischen Widerstand R und der Induktivität L gelegt wird, so ist offenbar

$$s = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad r = R, \quad q = \omega L.$$

Wird die Spule durch einen verlustlosen Kondensator C ersetzt, so ist:

$$r = 0 \quad \text{und} \quad s = q = \frac{1}{\omega C}.$$

Enthält der Belastungskreis eisenhaltige Spulen, so können derartige einfache Zusammenhänge nicht mehr aufgestellt werden.

Zuweilen ist es bequemer, statt der drei Größen s, r, q drei andere σ, ϱ, $\varkappa$ einzuführen, die folgendermaßen definiert sind:

$$\sigma = \frac{J}{V}, \tag{5}$$

$$\varrho = \frac{P}{V^2}, \tag{6}$$

$$\varkappa = \mp\sqrt{\sigma^2 - \varrho^2}. \tag{7}$$

Man könnte

σ den Scheinleitwert,

ϱ den Leistungsleitwert und

$\varkappa$ den Querleitwert nennen.[1])

Zwischen diesen sechs Größen bestehen folgende Beziehungen

$$s\sigma = 1, \tag{8}$$

$$\varrho = r\sigma^2 \quad \text{oder} \quad r = \varrho s^2, \tag{9}$$

$$\varkappa = -q\sigma^2, \quad q = -\varkappa s^2. \tag{10}$$

Sind Strom und Spannung sinusförmig, so kann man die symbolische Bezeichnungsweise anwenden. Dann gelten für die definierten Widerstände und Leitwerte die Beziehungen:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{J}(r + jq), \tag{11}$$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{B}(\varrho + j\varkappa). \tag{12}$$

Es könnte nun so scheinen, als ob man mit Hilfe dieser Definitionen auch im allgemeinsten Fall eine strenge geometrische Darstellung einer Wechselstromverzweigung geben könnte. Wir wissen aber aus früheren Betrachtungen bereits, daß das unmöglich ist, wollen aber an einem Beispiel zeigen, warum dies auch mit Hilfe der neu eingeführten Bezeichnungen nicht möglich ist.

Dazu denken wir uns zwei beliebige in Reihe geschaltete Wechselstromkreise.

Die mehrwelligen Teilspannungen seien mit a und b (Augenblickswerte), die Gesamtspannung mit c bezeichnet, so daß

$$c = a + b$$

ist. Ist ferner i der Strom, der beide Kreise hintereinander durchfließt, so ist zu setzen:

$$P_a = M(ai), \quad P_b = M(bi), \quad P_c = M(ci)$$

$$P_a + P_b = P_c, \tag{13}$$

$$s_a = \frac{A}{J}, \quad s_b = \frac{B}{J}, \quad s_c = \frac{C}{J}, \tag{14}$$

1) Diese Bezeichnungen sind nicht allgemein üblich. Nach einem Vorschlag von Steinmetz wird ϱ die Konduktanz, $\varkappa$ die Suszeptanz genannt. In Deutschland hat man diese Benennungen vielfach bekämpft.

(15) $$r_a = \frac{P_a}{J^2}, \quad r_b = \frac{P_b}{J^2}, \quad r_c = \frac{P_c}{J^2},$$

(16) $$q_a = \sqrt{s_a^2 - r_a^2}, \quad q_b = \sqrt{s_b^2 - r_b^2}, \quad q_c = \sqrt{s_c^2 - r_c^2}.$$

Aus (13) und (15) folgt, daß

(17) $$r_c = r_a + r_b$$

ist, d. h. der gesamte Leistungswiderstand ist gleich der Summe der Teilleistungswiderstände. Für die Querwiderstände dagegen gilt dieser Satz im allgemeinen nicht, d. h. gewöhnlich ist:

(18) $$q_c \neq q_a \pm q_b.$$

Geometrisch ist dies folgendermaßen zu deuten. Wir legen (Fig. 30) zwei Dreiecke ABC aus s_a, r_a, q_a und BED aus s_b, r_b, q_b im Punkte B so aneinander, daß $AC \parallel BE$ ist, dann muß im allgemeinen BED um BE aus seiner Ebene so lange herausgedreht werden, bis $AD = s_c$ wird. Es ist:

$$AF = r_c = r_a + r_b$$

und

$$DF = q_c \neq q_a \pm q_b.$$

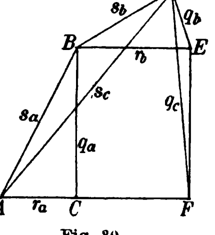


Fig. 30.

Aus früheren Betrachtungen können wir schließen, daß nur dann $q_c = q_a \pm q_b$ ist, wenn i mit a, b und c in einer Ebene durch ein Diagramm dargestellt werden kann, d. h. wenn es sich in der Form darstellen läßt:

$$i = \lambda a + \mu b,$$

wo λ und μ reelle Konstanten sind.[1]) Durch die Eigenschaft (18) der Querwiderstände wird der Wert dieser Definitionen etwas beeinträchtigt. Trotzdem werden sie, ebenso wie die Darstellungen durch Diagramme, in vielen Fällen der Praxis mit großem Vorteil angewendet werden.

---

1) Aus der Bedingung $q_c = q_a + q_b$ läßt sich die Gleichung ableiten:

$$J^2[M^2(ab) - A^2B^2] = 2\,M(ab)\,M(ai)\,M(bi) - A^2M^2(bi) - B^2M^2(ai).$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn man $i = \lambda a + \mu b$ setzt.

Beispiel: Ein Strom $i = 5 \sin \omega t + \sin 3 \omega t$ durchfließt hintereinander eine Spule, deren Ohmischer Widerstand $R = 30$ und deren Induktivität $\omega L = 40$ ist, und einen Kondensator, für den $\frac{1}{\omega C} = 45$ sei. Folglich ist die Teilspannung an der Spule:

$$a = Ri + L \frac{di}{dt},$$

$$= 150 \sin \omega t + 30 \sin 3 \omega t,$$

$$+ 200 \cos \omega t + 120 \cos 3 \omega t$$

und diejenige am Kondensator:

$$b = \frac{1}{C} \int i dt,$$

$$= - 225 \cos \omega t - 15 \cos 3 \omega t.$$

Demnach die Gesamtspannung:

$$c = a + b = 150 \sin \omega t - 25 \cos \omega t + 30 \sin 3 \omega t + 105 \cos 3 \omega t.$$

Die Quadrate der Effektivwerte sind:

$$J^2 = 13, \quad A^2 = 38900, \quad B^2 = 25425, \quad C^2 = 17525$$

und die Leistungen:

$$P_a = 390, \quad P_b = 0, \quad P_c = 390,$$

folglich

$$r_a = 30, \quad r_b = 0, \quad r_c = 30,$$

$$s_a^2 = 2992, \quad s_b^2 = 1956, \quad s_c^2 = 1348$$

und

$$q_a^2 = 2092, \quad q_b^2 = 1956, \quad q_c^2 = 448,$$

$$q_a = 45,74$$

$$q_b = 44,23$$

$$q_a - q_b = 1,51, \quad \text{dagegen } q_c = 21,2.$$

Dritter Abschnitt:

Die Mehrphasenströme.

19. Die geometrische Darstellung von mehrwelligen n-Phasenströmen. Wir denken uns n voneinander isolierte, im übrigen gleich geformte Spulen symmetrisch in einem Kreise an-

geordnet (Fig. 31) und einen Magneten NS, der sich um den Mittelpunkt des Kreises mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Die vom Magneten ausgehenden Kraftlinien schneiden die Spulen und erzeugen daher in denselben Wechsel $EMKe$, die abgesehen von der Phase einander gleich sind; die Spannungen werden im allgemeinen mehrwellig sein; ihre Kreisfrequenz ist ω. Wir setzen:

$$(1) \qquad v_1 = f(t)$$

die EMK in Spule 1, so werden die EMK in den folgenden Spulen:

$$v_2 = f\left(t + \frac{T}{n}\right), \qquad v_3 = f\left(t + \frac{2T}{n}\right), \ldots$$

Eine derartig angeordnete Maschine heißt eine n-Phasenmaschine.

Verbindet man alle Spulen hintereinander, $A_1 E_2$; $A_2 E_3$; ... $A_n E_1$, so entsteht ein geschlossener Stromkreis, in welchem die resultierende EMK

$$(2) \qquad v_0 = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

induziert wird. Nach Gleichung (4) auf S. 42 ist

$$(3) \qquad v_0 = n\,(f_n(t) + f_{2n}(t) + \cdots),$$

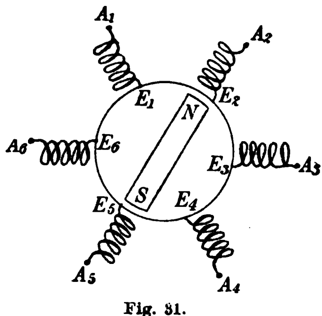


Fig. 31.

wo $f_k(t)$ die Oberschwingung der Ordnung k bedeutet, d. h. es resultiert eine EMK der n-fachen Frequenz, welche in den Spulen Ausgleichsströme von ebenfalls der n-fachen Frequenz hervorrufen würde. Hat man also nicht die Gewißheit, daß in den Spannungen v_1, v_2 ... die $n$te Oberschwingung fehlt, so empfiehlt es sich nicht, diese Polygonschaltung anzuwenden. Man pflegt besser so zu schalten, daß die Punkte E_1, E_2 ... E_n miteinander verbunden werden. Diese Schaltung wird Sternschaltung genannt. Die Spannungen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden freien Enden $A_1\, A_2$, $A_2\, A_3$, ... der Spulen, die sogenannten verketteten Spannungen, sind daher

$$(4) \qquad v_{12} = v_1 - v_2, \qquad v_{23} = v_2 - v_3.$$

Durch Addition dieser Gleichungen findet man:

$$(5) \qquad v_{12} + v_{23} + \cdots = 0.$$

Da die v_{12}, v_{23} ... abgesehen von der Phase ebenfalls alle einander gleich sind, so müssen wegen der Gleichung (5) in den verketteten Spannungen v_{12}, v_{23} ... die Oberschwingungen der Ordnung n, $2n$, $3n$, ... fehlen, obwohl sie in v_1, v_2, ... vorhanden sind.

Sind die Sternspannungen v_1, v_2 ... v_n sinusförmig, so sind es auch die verketteten v_{12}, v_{23}, ... v_n und die Phasenverschiebung zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Spannungen beträgt $\frac{2\pi}{n}$.

Für die Effektivwerte einwelliger Spannungen gilt die Gleichung:

$$V_{12} = 2\,V_1 \sin\frac{\pi}{n}.$$

Im Falle der beliebigen Kurvenform sei:

$$\text{(6)}\qquad \begin{cases} v_1 = f(t) = \sum a_k \sin(k\omega t + \alpha_k) \\ v_2 = f\left(t + \frac{T}{n}\right) = \sum a_k \sin\left(k\omega t + \frac{2\pi k}{n} + \alpha_k\right). \end{cases}$$

Folglich ist:

$$\text{(7)}\qquad M(v_1 v_2) = \frac{1}{2}\sum a_k^2 \cos\frac{2\pi k}{n}$$

und die effektive Phasenverschiebung Φ zwischen i_1 und i_2:

$$\text{(8)}\qquad \cos\Phi = \frac{\Sigma a_k^2 \cos\frac{2\pi k}{n}}{\Sigma a_k^2}$$

oder

$$\text{(8a)}\qquad \sin^2\frac{\Phi}{2} = \frac{\Sigma a_k^2 \sin\frac{2\pi k}{n}}{\Sigma a_k^2}.$$

Φ kann je nach der Kurvenform größer oder kleiner als $\frac{2\pi}{n}$ sein. Dies erkennt man am einfachsten, wenn man eine Welle mit nur einer Oberschwingung der Ordnung λ betrachtet. Dafür ist:

$$\text{(9)}\qquad \cos\Phi = \frac{a_1^2 \cos\frac{2\pi}{n} + a_\lambda^2 \cos\frac{2\pi\lambda}{n}}{a_1^2 + a_\lambda^2}.$$

Mithin ist:

$$(10)\qquad \begin{cases} \Phi > \frac{2\pi}{n}, & \text{wenn} \quad \cos\frac{2\pi\lambda}{n} < \cos\frac{2\pi}{n}, \\ \Phi < \frac{2\pi}{n}, & \text{wenn} \quad \cos\frac{2\pi\lambda}{n} > \cos\frac{2\pi}{n} \qquad \text{ist.} \end{cases}$$

Die Größe des Augenblickswertes der verketteten Spannung ist:

$$(11)\qquad v_{12} = -\sum 2\,a_k \sin\frac{k\pi}{n}\cos\left(k\omega t + \frac{k\pi}{n} + \alpha_k\right).$$

Für die Effektivwerte von Stern- und verketteter Spannung findet man:

$$(12)\qquad V_1^2 = \frac{1}{2}\sum a_k^2$$

$$(13)\qquad V_{12}^2 = 2\sum a_k^2 \sin^2\frac{k\pi}{n}$$

und folglich nach Gleichung (8a):

$$(14)\qquad V_{12} = 2\,V_1 \sin\frac{\Phi}{2}.$$

Je nachdem also, ob die erste oder die zweite Ungleichung (10) gilt, ist das Verhältnis zwischen verketteter und Sternspannung größer oder kleiner wie bei sinusförmigen Spannungen.

Aus den allgemeinen Betrachtungen über die Darstellung mehrwelliger Ströme durch Diagramme folgt unmittelbar, daß eine geometrische Darstellung von mehrwelligen n-Phasenströmen im allgemeinen nicht möglich ist. Die besonderen Voraussetzungen, unter denen eine solche Darstellung in der Ebene oder im Raume statthaft ist, sind leicht anzugeben.

Aus Gleichung (11) auf S. 40 folgt unmittelbar, daß sich die Spannungen

$$v_1 = f(t), \qquad v_2 = f\left(t + \frac{T}{n}\right), \ldots v_n = f\left(t + \frac{(n-1)\,T}{n}\right)$$

in einer Ebene durch n gleichmäßig um den Mittelpunkt M verteilte Radien darstellen lassen, wenn sie nur Oberwellen der Ordnung

$$k = hn \pm 1 \qquad (h = 0, 1, 2 \ldots)$$

enthalten. Dies wird bestätigt durch die Berechnung der effektiven Phasenverschiebung Φ_λ zwischen

$$v_1 = f(t) \quad \text{und} \quad v_{\lambda+1} = f\left(t + \frac{\lambda T}{n}\right).$$

Es wird

$$\cos \Phi_\lambda = \frac{\Sigma a_k^2 \cos \frac{2k\lambda\pi}{n}}{\Sigma a_k^2} = \frac{\Sigma a_k^2 \cos\left(2h\lambda\pi \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\right)}{\Sigma a_k^2} = \cos \frac{2\lambda\pi}{n}.$$

d. h., effektive und wirkliche Phasenverschiebung sind einander gleich.

Wir wollen nun die Frage erörtern, wann n Spannungen beliebiger Kurvenform

$$v_1 = f(t), \qquad v_2 = f\left(t + \frac{T}{n}\right), \ldots v_n = f(t + \frac{n-1}{n} T)$$

im **Raume** durch Vektoren dargestellt werden können. Da die effektive Phasenverschiebung zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Spannungen stets dieselbe Größe hat, so sind nur zwei Anordnungen der Vektoren möglich. Entweder sie bilden eine symmetrische, gerade, n-seitige Pyramide. Oder, falls n gerade ist, es werden zwei solche mit den Spitzen aneinander stoßende Pyramiden gebildet, von denen jede nur $\frac{n}{2}$ Seiten hat; die Kanten der Pyramiden sind gegeneinander versetzt, so daß sie die gemeinsame Achse der Pyramiden symmetrisch umgeben.

Wir betrachten zunächst den ersten Fall. Eine n-seitige gerade Pyramide kann stets derart konstruiert werden, daß man sich in einer Ebene ein reguläres n-Eck zeichnet und im Mittelpunkt desselben eine Senkrechte errichtet. Die radialen Vektoren, welche vom Fußpunkt der Senkrechten zu den Ecken des Polygons laufen, seien:

$$(15) \qquad \mathfrak{P}_1 = \varphi(t), \qquad \mathfrak{P}_2 = \varphi\left(t + \frac{T}{n}\right), \ldots$$

Wir wissen, daß die $\mathfrak{P}$ nur die Oberschwingungen der Ordnung $hn \pm 1$ enthalten können. Die Senkrechte im Mittelpunkt stellt eine Spannung

$$(16) \qquad \mathfrak{H} = \psi(t)$$

dar, welche mit allen Spannungen $\mathfrak{P}$ die effektive Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$ bildet, d. h.

$$M(\mathfrak{P}_k \cdot \mathfrak{H}) = 0.$$

Das ist offenbar nur möglich, wenn in $\mathfrak{H}$ nur Teilwellen vor-

kommen, die in $\mathfrak{P}$ nicht enthalten sind. Die gesuchten Vektoren, welche die Kanten der Pyramide bilden, sind also:

$$f(t) = \varphi(t) + \psi(t). \tag{17}$$

Eine andere Phase von f setzt sich aus der entsprechenden von φ und demselben Vektor ψ zusammen, d. h.

$$f\left(t + \frac{\lambda T}{n}\right) = \varphi\left(t + \frac{\lambda T}{n}\right) + \psi(t) \cdot \quad (\lambda = 1, 2 \ldots) \tag{18}$$

Setzt man andererseits in Gleichung (17) $t + \frac{\lambda T}{n}$ an die Stelle von t, so ergibt der Vergleich mit Gleichung (18):

$$\psi\left(t + \frac{\lambda T}{n}\right) = \psi(t) \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n.$$

ψ hat also die Periodendauer $\frac{T}{n}$.

Die Spannungen v haben somit Oberschwingungen mit den Ordnungszahlen:

$$hn - 1 \qquad hn \qquad hn + 1 \qquad (h = 0, 1, 2 \ldots)$$

Ist n gerade, so ist, wie oben erwähnt, eine zweite Anordnung möglich. Wir können uns diese in der Weise entstanden denken, daß wir den Vektor $\mathfrak{H}$ auf einer auf der Grundfläche errichteten Senkrechten nach beiden Seiten abtragen und die Ecken des in der Grundfläche liegenden n-Ecks abwechselnd mit dem Endpunkt von $+\mathfrak{H}$ und $-\mathfrak{H}$ verbinden. Es wird also

$$\left\{\begin{aligned} f(t) &= \varphi(t) + \psi(t) \\ f\left(t + \frac{T}{n}\right) &= \varphi\left(t + \frac{T}{n}\right) - \psi(t) \\ f\left(t + \frac{2T}{n}\right) &= \varphi\left(t + \frac{2T}{n}\right) + \psi(t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{19}$$

In diesem Falle muß also

$$\psi\left(t + \frac{\lambda T}{n}\right) = \pm\, \psi(t)$$

sein, wo das positive Zeichen für gerade λ, das negative für ungerade λ gilt. ψ enthält also die Oberschwingungen der Ordnung $h\frac{n}{2}$ (für $h = 1, 3, 5 \ldots$), und f setzt sich aus den Teilwellen

$$hn \pm 1, \qquad h = 0, 1, 2 \ldots$$

und

$$h' \frac{n}{2} \qquad h' = 1, 3, 5$$

zusammen.

Mit diesen Ergebnissen stimmen auch die Folgerungen, die sich aus der Formel für die effektive Phasenverschiebung zweier aufeinanderfolgender Spannungen ergeben. Für den Fall der einfachen Pyramide (n ungerade) ergibt sich, da

$$\text{für} \quad k = hn \pm 1 \qquad \cos \frac{2k\pi}{n} = \cos \frac{2\pi}{n} \quad \text{und}$$

$$\text{für} \quad k = hn \qquad \cos \frac{2k\pi}{n} = 1 \quad \text{ist.}$$

$$\cos \Phi = \left(\cos \frac{2\pi}{n} \sum_{k=hn\pm 1} a_k^2 + \sum_{k=hn} a_k^2\right) : \sum a_k^2$$

oder

$$\cos \Phi = \cos \frac{2\pi}{n} + 2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \frac{a_n^2 + a_{2n}^2 + \cdots}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots}$$

$$\text{d. h.} \quad \Phi < \frac{2\pi}{n}.$$

Im Fall der Doppelpyramide ist dagegen:

$$\text{für} \quad k = h\frac{n}{2} \quad (h = 1, 3, 5 \ldots) \quad \cos \frac{2k\pi}{n} = -1$$

$$\cos \Phi = \cos \frac{2\pi}{n} - 2 \cos \frac{2\pi}{n} \frac{a_{\frac{n}{2}}^2 + \cdots}{a_1^2 + \cdots}$$

und

$$\Phi > \frac{2\pi}{n}.$$

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft; bei anderen Kurvenformen ist eine geometrische Darstellung von n der Phase nach gleichmäßig verteilten Spannungen nicht möglich.

Beispiel: Ein Vierphasenstrom ist in einer Ebene durch zwei aufeinander senkrecht stehende Gerade darstellbar, wenn er nur die Oberschwingungen der Ordnung $4n \pm 1$, d. i. der Ordnung 1, 3, 5, 7, 9 ... enthält. Treten noch die Oberschwingungen der Ordnung 4, 8, 12 ... hinzu, so sind die Ströme durch eine gerade vierseitige Pyramide darstellbar. Treten dagegen zu den

ungeradzahligen Oberwellen diejenigen der Ordnung 2, 6, 10 . . . hinzu, so werden sie durch zwei mit der Spitze aneinander stoßende stumpfe Winkel dargestellt, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen. Enthalten die Ströme gleichzeitig die Oberschwingungen der Ordnung 2, 4, 6, 8, . . . , so ist eine geometrische Darstellung weder in der Ebene noch im Raume möglich.

20. Der Drehstrom. Der in der Praxis am häufigsten gebrauchte Mehrphasenstrom ist der Drehstrom, für welchen $n = 3$ ist. Aus unseren allgemeinen Betrachtungen ist zu folgern, daß die Ströme

$$(1) \qquad v_1 = f(t), \qquad v_2 = f\left(t + \frac{T}{3}\right), \qquad v_3 = f\left(t + \frac{2T}{3}\right)$$

geometrisch sich stets durch eine dreiseitige Pyramide darstellen lassen, die nur dann sich zu einer Ebene streckt, wenn f die Oberschwingungen der Ordnung 3, 6, 9, . . . nicht enthält. In letzterem Falle wird die effektive Phasenverschiebung gleich der wirklichen, d. i. 120°. Im ersteren dagegen ist sie kleiner als 120°.

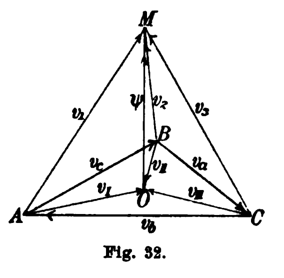


Fig. 32.

Drehstrommaschinen pflegen in Stern geschaltet zu werden; die Sternspannungen können die 3., 9., . . . Oberschwingung enthalten, die Summe der Augenblickswerte der Sternspannungen braucht nicht zu verschwinden. Die verketteten oder Dreiecksspannungen hängen mit den Sternspannungen durch die Gleichungen zusammen:

$$(2) \qquad \begin{gathered} v_a = v_2 - v_3, \qquad v_b = v_3 - v_1, \qquad v_c = v_1 - v_2 \\ \text{d. h.} \quad v_a + v_b + v_c = 0. \end{gathered}$$

Die verketteten Spannungen können also die Oberschwingungen der Ordnung 3, 9 . . . nicht enthalten, sie sind durch ein ebenes Dreieck darstellbar. Sämtliche Spannungen lassen sich stets durch eine gerade, dreiseitige Pyramide (Fig. 32) darstellen, deren Höhe den Strom $\psi(t)$ repräsentiert. Kürzt man wieder ab:

$$a_k \sin(k\omega t + \alpha_k) = f_k,$$

so sind die durch OA, OB, OC dargestellten Spannungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} v_{\mathrm{I}} = f_1 + f_5 + f_7 + f_{11} + \cdots, \\ v_{\mathrm{II}} = v_{\mathrm{I}}\left(t + \frac{T}{3}\right) \qquad v_{\mathrm{III}} = v_{\mathrm{I}}\left(t + \frac{2T}{3}\right), \end{cases}$$

ferner

$$(4)\qquad \psi(t) = f_3 + f_9 + \cdots,$$

folglich die durch MA, MB, MC dargestellten Sternspannungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} v_1 = f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 + \cdots \\ v_2 = v_1\left(t + \frac{T}{3}\right), \qquad v_3 = v_1\left(t + \frac{2T}{3}\right). \end{cases}$$

Die Effektivwerte sind:

$$(6)\qquad \begin{cases} V_{\mathrm{I}}^2 = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_5^2 + a_7^2 + \cdots) \\ \Psi^2 = \frac{1}{2}(a_3^2 + a_9^2 + \cdots) \\ V_1^2 = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \cdots \end{cases}$$

und

$$(7)\qquad V_1^2 = V_{\mathrm{I}}^2 + \Psi^2.$$

Die verkettete Spannung ist:

$$V_{12} = V_{\mathrm{I}}\sqrt{3}$$

folglich

$$(8)\qquad V_1^2 - \frac{1}{3}V_{12}^2 = \Psi^2.$$

Im allgemeinen ist also die Sternspannung größer als das Produkt aus verketteter Spannung und $\sqrt{3}$.

Im folgenden mögen einige dem Drehstromsystem eigentümliche Beziehungen abgeleitet werden.

I. Die Strom- und Spannungsverteilung in einem induktionslos belasteten Drehstromsystem.

Ein Drehstromsystem, dessen verkettete Spannungen v_a, v_b, v_c beliebig verzerrt sein mögen, sei entweder in Dreieck oder in Stern durch Widerstände belastet.

a) Belastung in Dreieck. Sind r_a, r_b, r_c die drei Widerstände, so gelten folgende Gleichungen (s. Fig. 33):

(9) $$i_1 = i_c - i_b, \quad i_2 = i_a - i_c, \quad i_3 = i_b - i_a,$$

(10) $$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$$

(11) $$i_a r_a + i_b r_b + i_c r_c = 0.$$

Da zwischen sämtlichen i's lineare Gleichungen bestehen, so sind sie alle durch ein in einer Ebene liegendes Diagramm darstellbar (Fig. 34) (vgl. S. 65). Aus diesem ergibt sich:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AO \sin AOC}{BO \sin BOC}$$

und da

$$\frac{\sin AOC}{\sin BOC} = \frac{v_b}{v_a}$$

ist:

$$AD : BD = i_a v_b : i_b v_a = r_b : r_a.$$

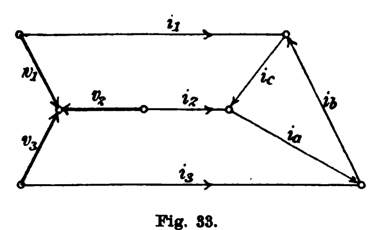


Fig. 33.

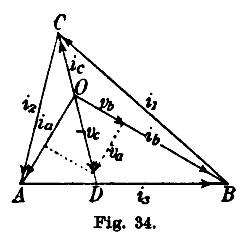


Fig. 34.

O ist also der Schwerpunkt der Punkte A, B, C, wenn man sich in ihnen die Massen r_a, r_b, r_c konzentriert denkt. Daraus ergibt sich eine einfache Methode, das Diagramm der Ströme zu konstruieren.

Legt man durch den Schwerpunkt O eine Achse senkrecht zur Zeichenebene, so ist dies bekanntlich die Achse für das kleinste Trägheitsmoment. Da letzteres die Größe $i_a^2 r_a + i_b^2 r_b + i_c^2 r_c$ hat, so besagt dieser Satz, daß die Ströme sich so verteilen, daß ein Minimum von Energie verbraucht wird.

Die analytische Berechnung ergibt aus Gleichungen (9) u. (11)

$$i_1^2 = i_c^2 + i_b^2 - 2 i_c i_b, \quad i_a^2 r_a^2 = i_c^2 r_c^2 + i_b^2 r_b^2 + 2 i_c i_b r_c r_b.$$

Eliminiert man daraus $i_c i_b$ und geht zu den Mittelwerten über, so erhält man:

(12) $$J_1^2 r_b r_c = (J_b^2 r_b + J_c^2 r_c)(r_b + r_c) - J_a^2 r_a^2$$

und zwei analoge Gleichungen, welche gestatten, die Phasenströme $J_1 J_2 J_3$ aus den Dreiecksströmen $J_a J_b J_c$ zu berechnen.

Die Summe dieser Gleichungen ergibt:

$$(13)\qquad \begin{aligned} &J_1^2 r_b r_c + J_2^2 r_c r_a + J_3^2 r_a r_b = \\ &(J_a^2 r_a + J_b^2 r_b + J_c^2 r_c)(r_a + r_b + r_c). \end{aligned}$$

Andrerseits folgt aus (11) und (9)

$$i_a r_a + (i_a + i_3) r_b + (i_a - i_2) r_c = 0$$

oder:

$$(14)\qquad i_a(r_a + r_b + r_c) = i_2 r_c - i_3 r_b.$$

Quadriert man und berücksichtigt, daß: $2 i_2 i_3 = i_1^2 - i_2^2 - i_3^2$ ist, so ergibt sich:

$$(15)\qquad J_a^2 (r_a + r_b + r_c)^2 = (J_2^2 r_c + J_3^2 r_b)(r_b + r_c) - J_1^2 r_b r_c.$$

Diese und zwei analoge Gleichungen erlauben, die Dreiecksströme $J_a J_b J_c$ aus den Phasenströmen $J_1 J_2 J_3$ zu berechnen.

Sind die drei Widerstände einander gleich $r_a = r_b = r_c$, so vereinfachen sich die Gleichungen in:

$$(12\text{a})\qquad J_1^2 = 2(J_b^2 + J_c^2) - J_a^2,$$

$$(15\text{a})\qquad 9 J_a^2 = 2(J_2^2 + J_3^2) - J_1^2,$$

$$(13\text{a})\qquad J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = 3(J_a^2 + J_b^2 + J_c^2)$$

und daraus die eigentümliche Beziehung[1]):

$$(16)\qquad J_1^4 + J_2^4 + J_3^4 = 9(J_a^4 + J_b^4 + J_c^4).$$

b) Belastung in Stern. Seien k_1, k_2, k_3 die Leitwerte[2]) der drei Zweige zum Sternpunkt, so gelten folgende Gleichungen:

$$(17)\qquad -v_a = v_3 - v_2, \quad -v_b = v_1 - v_3, \quad -v_c = v_2 - v_1,$$

$$(18)\qquad v_a + v_b + v_c = 0,$$

$$(19)\qquad v_1 k_1 + v_2 k_2 + v_3 k_3 = 0.$$

Vergleicht man dieses Gleichungssystem mit den Gleichungen (9), (10), (11), so folgt, daß alle unter a) abgeleiteten Sätze Formeln bestehen bleiben, wenn man ersetzt:

---

1) A. Russell, a. a. O. Bd. 1, S. 230.
2) Reziproke Widerstände s. S. 68.

$$\begin{matrix} & i\,r & 1\,2\,3 & a\,b\,c \\ \text{durch} & v\,k & a\,b\,c & 1\,2\,3 \end{matrix}$$

und bei der Veränderung der Indices 1 2 3 in abc das Vorzeichen ändert.

Mithin besteht das Diagramm der Spannungen aus einem Dreieck mit den Seiten V_a, V_b, V_c; man sucht den Schwerpunkt der Ecken des Dreiecks, wenn in ihnen die Massen k_1, k_2, k_3 konzentriert sind.

Zwischen den Stern- und Dreiecksspannungen bestehen entsprechend den Gleichungen (12) und (15) die Beziehungen:

$$(20) \qquad V_a^2 k_2 k_3 = (V_2^2 k_2 + V_3^2 k_3)(k_2 + k_3) - V_1^2 k_1^2,$$

$$(21) \qquad V_1^2 (k_1 + k_2 + k_3)^2 = (V_b^2 k_3 + V_c^2 k_2)(k_2 + k_3) - V_a^2 k_2 k_3,$$

und wenn die drei Leitwerte einander gleich sind entsprechend den Gleichungen (12a), (15a), (13a) und (16):

$$(20a) \qquad V_a^2 = 2(V_2^2 + V_3^2) - V_1^2,$$

$$(21a) \qquad 9 V_1^2 = 2(V_b^2 + V_c^2) - V_a^2,$$

$$(22) \qquad V_a^2 + V_b^2 + V_c^2 = 3(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2),$$

$$(23) \qquad V_a^4 + V_b^4 + V_c^4 = 9(V_1^4 + V_2^4 + V_3^4).$$

II. Die Beziehungen zwischen den Spannungen in einem verzerrten Drehstromsystem.

Die folgende Aufgabe werde nur für einwellige Spannungen gelöst; wir bedienen uns daher der symbolischen Bezeichnungsweise. Ist in einem vollkommen symmetrischen Drehstromsystem $\mathfrak{B}_1$ eine Sternspannung, so sind die übrigen beiden darstellbar in der Form:

$$(24) \qquad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 e^{\frac{2\pi j}{3}}, \quad \mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_1 e^{\frac{4\pi j}{3}} = \mathfrak{B}_1 e^{-\frac{2\pi j}{3}}.$$

Es mögen nun, sei es durch Unsymmetrien der Generatoren, sei es durch ungleichmäßige Belastung, die Sternspannungen nach Größe und Phase nur geringe Änderungen erfahren. Es fragt sich dann, wie groß die entsprechenden Änderungen der Dreiecksspannungen werden.

Die veränderten Sternspannungen seien:

$$(25) \qquad \begin{cases} \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1(1 + \delta_1) e^{j\varepsilon_1}, \\ \mathfrak{B}_2' = \mathfrak{B}_2(1 + \delta_2) e^{j\varepsilon_2}, \\ \mathfrak{B}_3' = \mathfrak{B}_3(1 + \delta_3) e^{j\varepsilon_3}. \end{cases}$$

Die δ geben also die prozentische Änderung der Größe der Spannungen, die ε die Größe der Phasenabweichungen nach vorwärts. Die δ und ε mögen so klein sein, daß man nur die linearen Glieder beizubehalten braucht. D. h.

$$\mathfrak{V}_1' = \mathfrak{V}_1(1+\delta_1)(1+j\varepsilon_1) = \mathfrak{V}_1(1+\delta_1+j\varepsilon_1).$$

Die Dreiecksspannungen seien $\mathfrak{V}_a$, $\mathfrak{V}_b$, $\mathfrak{V}_c$. Dementsprechend werden die veränderten Dreiecksspannungen gesetzt:

$$\mathfrak{V}_a' = \mathfrak{V}_a(1+\delta_a+j\varepsilon_a)$$

und zwei analoge Gleichungen; die δ_a und ε_a sind zu berechnen.

Es ist nach Gleichung (17)

$$\mathfrak{V}_c' = \mathfrak{V}_1' - \mathfrak{V}_2' = \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2 + (\delta_1+j\varepsilon_1)\mathfrak{V}_1 - (\delta_2+j\varepsilon_2)\mathfrak{V}_2.$$

Wird zur Abkürzung

$$\delta + j\varepsilon = \eta \tag{26}$$

gesetzt, so wird:

$$\mathfrak{V}_c' = \mathfrak{V}_c + \frac{1}{2}(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2)(\eta_1+\eta_2) + \frac{1}{2}(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)(\eta_1-\eta_2)$$

und

$$\frac{\mathfrak{V}_c'}{\mathfrak{V}_c} = 1 + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2) + \frac{1}{2}(\eta_1-\eta_2)\frac{\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_1-\mathfrak{V}_2}.$$

Aber aus Gleichung (24) folgt:

$$\frac{\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_1-\mathfrak{V}_2} = \frac{1+e^{\frac{2\pi j}{3}}}{1-e^{\frac{2\pi j}{3}}} = -\frac{e^{\frac{\pi j}{3}}+e^{-\frac{\pi j}{3}}}{e^{\frac{\pi j}{3}}-e^{-\frac{\pi j}{3}}} = -\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{j\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{j}{\sqrt{3}}.$$

Daher

$$\eta_c = \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2) + \frac{j}{2\sqrt{3}}(\eta_1-\eta_2) \tag{27}$$

und wenn man die Bedeutung von η einsetzt:

$$\delta_c = \frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(\varepsilon_1-\varepsilon_2), \tag{28}$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(\delta_1-\delta_2). \tag{29}$$

Kann man voraussetzen, daß auch

$$\mathfrak{V}_1' + \mathfrak{V}_2' + \mathfrak{V}_3' = 0$$

ist, so findet man umgekehrt:

$$\eta_3 = \frac{1}{2}(\eta_b + \eta_a) - \frac{j}{2\sqrt{3}}(\eta_b - \eta_a) \tag{30}$$

und daraus die entsprechenden Gleichungen für die δ und ε. Die ε sind im Bogenmaß einzusetzen.

21. Die Leistungsberechnung von Mehrphasenströmen. Es mögen n Leiter einen n Phasenstrom von der Erzeugungsstelle zur Verbrauchsstelle führen. An einer Stelle der Übertragung denken wir uns einen Querschnitt durch das Leitersystem. In jeder Leitung mag der Augenblickswert des Stromes in der Richtung von der Erzeugungsstelle zur Verbrauchsstelle positiv gerechnet werden. Die gesamte Strommenge, die in einem kleinen Zeitteilchen durch die Querschnittsebene fließt, muß Null sein; denn sonst müßte sich irgendwo in einem Kondensator eine Elektrizitätsmenge ansammeln, ohne daß in der gegenüberliegenden Belegung die gleiche Menge mit entgegengesetztem Zeichen vorhanden wäre. Sind also $i_1, i_2, \ldots i_n$ die Augenblickswerte der Ströme in den einzelnen Leitern, so muß

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = 0$$

sein. Man kann sich daher, ohne das Stromsystem in elektrischer Beziehung zu ändern, noch einen beliebigen stromlosen Leiter hinzudenken, der die Rückleitung sämtlicher Ströme $i_1, i_2, \ldots i_n$ darstellt. Rechnet man die Stromrichtung in diesem hypothetischen Leiter entgegengesetzt derjenigen der übrigen n Leiter, so kann man das ganze Stromsystem in n einzelne Schleifen auflösen; jede dieser Schleifen besteht aus einem der ursprünglich vorhandenen Leiter des n Phasensystems und dem hypothetischen Rückleiter. Letzterem kann man eine beliebige Spannung gegen Erde erteilen, ohne das Stromsystem zu stören; seien $v_{10}, v_{20}, \ldots v_{n0}$ seine Spannungen gegen die n Leiter des n Phasensystems. Dann sind die Leistungen, die in den einzelnen Stromschleifen verbraucht werden:

$$M(v_{10} i_1), \quad M(v_{20} i_2), \ldots \quad M(v_{n0} i_n)$$

und daher die gesamte im n Phasensystem verbrauchte Leistung:

$$P = M(v_{10} i_1 + v_{20} i_2 + \cdots + v_{n0} i_n).$$

Die Lage und Spannung des hypothetischen Leiters ist, wie

gesagt, ganz beliebig. Man kann ihn z. B. nacheinander mit den Leitern 1, 2, 3, ... zusammenfallen lassen, und erhält dadurch die folgenden Formeln für die Leistung:

$$(1)\qquad \begin{cases} P = M(v_{21} i_2 + v_{31} i_3 + \cdots + v_{n1} i_n), \\ = M(v_{12} i_1 + v_{32} i_3 + \cdots + v_{n2} i_n), \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ = M(v_{1n} i_1 + v_{2n} i_2 + \cdots + v_{n-1\,n} i_{n-1}), \end{cases}$$

wo die $v_{12}, v_{13}, \ldots$ die verketteten Spannungen des Systems sind, und zwar positiv zu rechnen in Richtung der Indexfolge.

Die Formeln (1) enthalten auf der rechten Seite je $n - 1$ Glieder. Man kann also durch eine verhältnismäßig einfache, leicht auszuführende Schaltung die Leistung eines beliebigen nPhasensystems durch $n - 1$ Leistungsmesser messen.

Es möge ein symmetrisches n Phasensystem gleichmäßig belastet werden, d. h. mathematisch ausgedrückt, die Effektivwerte der Spannungen zwischen zwei aufeinander folgenden Leitern sind einander gleich, ebenso die Effektivwerte der Ströme in denselben Leitungen; die Phasendifferenz zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Spannungen und Strömen ist $\frac{T}{n}$. Dann kann man natürlich auch n Spannungen

$$v_{10}, \; v_{20}, \cdots v_{n0},$$

gegen einen gedachten Nulleiter ausfindig machen, die ebenfalls die eben genannten Eigenschaften haben. Der Augenblickswert der Leistung ist:

$$p = v_{10} i_1 + v_{20} i_2 + \cdots + v_{n0} v_n.$$

Ist

$$v_{10} = \sum a_k \sin(k\omega t + \alpha_k), \qquad i_1 = \sum b_k \sin(k\omega t + \beta_k),$$

so wird:

$$v_{10} i_1 = \sum_k \sum_h a_k b_h \sin(k\omega t + \alpha_k) \sin(h\omega t + \beta_k) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \sum_h a_k b_h \left[\cos((k - h)\omega t + \alpha_k - \beta_h) - \right.$$

$$\left. - \cos((h + k)\omega t + \alpha_k + \beta_h)\right].$$

Beschränken wir uns auf den praktisch wichtigsten Fall, daß in v und i nur ungeradzahlige Oberwellen vorhanden sind, so

sind $k - h$ und $k + h$ gerade Zahlen. Die Summe der rechten Seite enthält also erstens eine Reihe nicht periodischer Glieder (nämlich, wenn $k = h$ ist) und eine Fouriersche Reihe mit nur geradzahligen Oberschwingungen; d. h.

$$v_{10} i_1 = \frac{1}{2} \sum_k a_k b_k \cos(\alpha_k - \beta_k) + \sum s_{2k}(t).$$

Setzt man in diese Gleichung $t + \frac{T}{n}$ an Stelle von t, so erhält man:

$$v_{20} i_2 = \frac{1}{2} \sum_k a_k b_k \cos(\alpha_k - \beta_k) + \sum s_{2k}\left(t + \frac{T}{n}\right).$$

Führt man diese Substitution n mal aus und addiert, so folgt

$$p = \frac{n}{2} \sum a_k b_k \cos(\alpha_k - b_k) + \sum_{h=0}^{n-1} \sum_k s_{2k}\left(t + \frac{hT}{n}\right).$$

Ist n ungerade, so muß nach Gleichung (4) auf Seite 42 die Doppelsumme auf der rechten Seite verschwinden, weil in der Fourierschen Reihe nur Glieder von geradzahliger Ordnung vorkommen. Daraus ergibt sich der interessante Satz, daß unter den gemachten Voraussetzungen auch der Augenblickswert der Leistung

$$p = \sum (v_{k0} i_k) = \frac{n}{2} \sum a_k b_k \cos(\alpha_k - \beta_k),$$

nicht periodisch, sondern konstant ist.

Die Gleichung (1) auf das meistgebrauchte Mehrphasensystem, den Drehstrom, übertragen besagt: die Leistungsmessung eines gewöhnlichen Drehstromsystems ist durch zwei Leistungsmesser ausführbar, die eines Drehstromsystemes mit Rückleitung zum Sternpunkt der Maschine (4 Leitersystem) durch drei Leistungsmesser. Die Gleichungen für die Drehstromleistungen lauten:

$$(2) \qquad \begin{cases} P = M(v_{13} i_1) + M(v_{23} i_2), \\ \quad = M(v_{21} i_2) + M(v_{31} i_3), \\ \quad = M(v_{32} i_3) + M(v_{12} i_1). \end{cases}$$

Die auf diesen Gleichungen fußende Anordnung der Leistungsmesser, die in Fig. 35 dargestellt ist, pflegt als Aronsche Schaltung bezeichnet zu werden.

Führt man wieder die Bezeichnung ein

$$v_{12} = v_c, \quad v_{23} = v_a, \quad v_{31} = v_b,$$

so erhält man durch Summierung die bei Zählerkonstruktionen[1]) häufiger gebrauchten Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} 3P = M[i_1(v_c - v_b) + i_2(v_a - v_c) + i_3(v_b - v_a)], \\ \quad\;\; = M[v_c(i_1 - i_2) + v_a(i_2 - i_3) + v_b(i_3 - i_1)], \\ \quad\;\; = M[(i_1 - i_3)(v_c - v_b) + (i_2 - i_3)(v_a - v_c)]. \end{cases}$$

Es mag noch der Spezialfall hervorgehoben werden, daß alle Spannungen und Ströme sinusförmige Kurven besitzen und Spannungen wie Belastungen symmetrisch verteilt sind. Dann kann man die Ströme und Spannungen in einem Diagramm nach Fig. 36

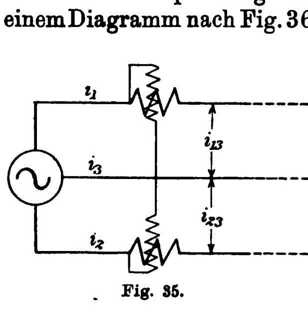


Fig. 35.

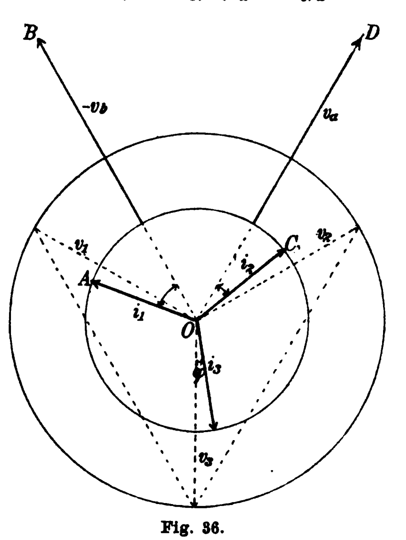


Fig. 36.

darstellen. Ist die Belastung induktionsfrei, so sind die Spannungen v_1, v_2, v_3 in Phase mit i_1, i_2, i_3; sind λ und μ die Ausschläge der Leistungsmesser in der Aronschen Schaltung und bedeutet C die Wattmeterkonstante, die für beide Apparate dieselbe sein mag, so ist zu setzen:

$$C\lambda = M(v_a i_2) = VJ \cos 30^0, \quad C\mu = M(- v_b i_1) = VJ \cos 30^0.$$

Ist dagegen der Leistungsfaktor der gleichmäßig verteilten

1) Über Zählerschaltungen für Vierleitersysteme s. E. T. Z. 1907. S. 71.

Belastung $\cos\varphi$, so ist das Spannungsdiagramm gegen das Stromdiagramm um den Winkel φ zu verdrehen und es wird:

$$C\lambda = VJ\cos(\varphi - 30^0), \quad C\mu = VJ\cos(\varphi + 30^0).$$

Also die Gesamtleistung

$$C(\lambda + \mu) = 2\,VJ\cos\varphi \cdot \cos 30^0 = \sqrt{3}\;V.J.\cos\varphi.$$

Andrerseits ist:

$$C(\lambda - \mu) = 2\,VJ\sin\varphi\sin 30^0$$

und durch Division:

$$\frac{\lambda - \mu}{\mu + \lambda} = \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg} 30^0$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\,\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}. \tag{4}$$

Diese in der Praxis viel gebrauchte Gleichung ist deswegen von Interesse, weil sie die Phasenverschiebung aus zwei Leistungsmessungen ergibt, ohne daß man Strom und Spannung zu messen braucht. Sie ist aber im allgemeinen nur für Sinusströme gültig. Da die Frage mehrfach in der Literatur erörtert worden ist, ist es vielleicht von Interesse festzustellen, wann die Formel (4) auch für mehrwellige Ströme gilt.

Seien:

$$(5)\quad \begin{cases} v_a = \sum a_k \sin(k\omega t + \alpha_k), \\ v_b = \sum a_k \sin\left(k\omega t + \alpha_k + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad (k = 1, 5, 7, 11, \ldots) \\ v_c = \sum a_k \sin\left(k\omega t + \alpha_k + \frac{4k\pi}{3}\right), \end{cases}$$

die Dreiecksspannungen und:

$$(6)\quad \begin{cases} i_a = \sum b_k \sin(k\omega t + \beta_k), \\ i_b = \sum b_k \sin\left(k\omega t + \beta_k + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad (k = 1, 3, 5, \ldots) \\ i_c = \sum b_k \sin\left(k\omega t + \beta_k - \frac{2k\pi}{3}\right), \end{cases}$$

die Belastungsströme. Dann ist:

$$i_1 = i_c - i_b = \sum 2 b_k \sin \frac{k\pi}{3} \cos (k\omega t + \beta_k + k\pi)$$

und

$$i_2 = i_a - i_c = \sum 2 b_k \sin \frac{k\pi}{3} \cos \left(k\omega t + \beta_k - \frac{k\pi}{3}\right).$$

Setzt man zur Abkürzung $\gamma_k = \alpha_k - \beta_k$, so erhält man für die Wattmeterausschläge:

$$C\lambda = M(v_a i_2) = \sum a_k b_k \sin \frac{k\pi}{3} \sin \left(\frac{k\pi}{3} + \gamma_k\right),$$

$$C\mu = M(-v_b i_1) = \sum a_k b_k \sin \frac{k\pi}{3} \sin \left(\frac{k\pi}{3} - \gamma_k\right)$$

und daraus:

$$\left.\begin{aligned} C(\lambda + \mu) &= 2 \sum a_k b_k \sin^2 \frac{k\pi}{3} \cos \gamma_k \\ C(\lambda - \mu) &= \sum a_k b_k \sin \frac{2k\pi}{3} \sin \gamma_k \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 5, 7, 11, \ldots)$$

$$(7) \quad \sqrt{3}\, \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} = \frac{a_1 b_1 \sin \gamma_1 - a_5 b_5 \sin \gamma_5 + a_7 b_7 \sin \gamma_7 - \cdots}{a_1 b_1 \cos \gamma_1 + a_5 b_5 \cos \gamma_5 + a_7 b_7 \cos \gamma_7 + \cdots} = \operatorname{tg} \psi.$$

Es fragt sich, ob der so berechnete Winkel ψ mit der effektiven Phasenverschiebung übereinstimmt. Es werde zur Abkürzung gesetzt:

$$N = a_1 b_1 \cos \gamma_1 + a_5 b_5 \cos \gamma_5 + \ldots,$$

so ist:

$$\cos^2 \psi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} = \frac{N^2}{Z^2},$$

wo

$$(8) \quad \begin{aligned} Z^2 = {} & a_1^2 b_1^2 + a_5^2 b_5^2 + 2 a_1 b_1 a_5 b_5 \cos (\gamma_5 + \gamma_1) + \\ & + 2 a_1 b_1 a_7 b_7 \cos (\gamma_7 - \gamma_1) + \cdots \end{aligned}$$

ist.

Andrerseits ist die effektive Phasenverschiebung Φ definiert durch:

$$\cos \Phi = \frac{M(v_a i_a)}{\sqrt{M(v_a^2) M(i_a^2)}} = \frac{N}{Y};$$

Darin ist Y^2 die Abkürzung für

$$(9) \quad Y^2 = (a_1^2 + a_5^2 + \cdots)(b_1^2 + b_5^2 + \cdots).$$

Φ und ψ sind also einander gleich, wenn

$$(10) \quad Z^2 = Y^2$$

ist. Durch Einsetzen der Reihen ergibt sich:

$$
(11)\quad \begin{aligned} Z^2 - Y^2 &= (a_1 b_5 - a_5 b_1)^2 + (a_1 b_7 - a_7 b_1)^2 + \cdots + b_3{}^2 a_1{}^2 + \cdots \\ &+ 4 a_1 b_1 a_5 b_5 \sin^2 \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_5) + 4 a_1 b_1 a_7 b_7 \sin^2 \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_7) + \cdots \end{aligned}
$$

Da auf der rechten Seite nur positive Glieder stehen, so kann Gleichung (10) nur erfüllt werden, wenn:

$$
\begin{gathered} a_1 : a_5 : a_7 \cdots = b_1 : b_5 : b_7 \cdots \\ b_3 = b_9 = \cdots 0, \\ \gamma_1 = \gamma_7 = \gamma_{13} = \cdots \\ = -\gamma_5 = -\gamma_{11} = \cdots \end{gathered}
$$

Es müssen also die Amplituden von Strom und Spannung in gleichem Verhältnis stehen; trotzdem sind aber die Kurven wegen der Beziehungen, die zwischen den Phasenwinkeln der Teilwellen bestehen, nicht einander ähnlich.

Vierter Abschnitt.

Die Hautwirkung bei Wechselströmen.

22. Die Definition des Wechselstromes bei ungleichmäßiger Stromverteilung. Fließt ein Gleichstrom durch einen zylindrischen Leiter, so verteilt er sich im allgemeinen gleichmäßig über den Querschnitt des Leiters. Anders bei Wechselstrom. Das Stromsystem, zu welchem der stromdurchflossene zylindrische Leiter gehört, erzeugt ein magnetisches Feld, welches auch die Stromleiter selber durchsetzt. Betrachtet man nun in einem und demselben zylindrischen Leiter zwei parallel verlaufende sehr dünne Stromfäden, so tritt im allgemeinen zwischen diesen beiden ein magnetisches Feld hindurch. Da dieses ein Wechselfeld ist, so muß in dem einen Stromfaden eine größere EMK induziert werden, als in dem andern. Die Folge davon ist, daß in den beiden Stromfäden Ströme fließen, die im allgemeinen nach Stärke und Phase voneinander verschieden sind, oder anders ausgedrückt: ein Wechselstrom verteilt sich ungleichmäßig über den Querschnitt des Leiters.

Es fragt sich, ob man unter Berücksichtigung dieser Ungleichmäßigkeit schlechtweg von einer „Stromstärke im Leiter" sprechen

kann, bzw. wie man sie zu definieren hat. Um dazu zu gelangen, führen wir den Begriff der Stromdichte ein: fließt durch das Querschnittselement dq der Strom di, der bei der Kleinheit von di als gleichmäßig verteilt über dq angesehen werden kann, so ist:

$$s = \frac{di}{dq} \tag{1}$$

die Stromdichte; sie ist also als Stromstärke pro Querschnittseinheit definiert; ihr Augenblickswert ist von Punkt zu Punkt des Querschnittes nach Stärke, Phase und Kurvenform verschieden. Wenn nun von der Wechselstromstärke i schlechtweg, die den Leiter durchfließt, gesprochen wird, so wollen wir darunter die gesamte durch den Querschnitt Q des Leiters fließende Strommenge verstehen. D. h. durch

$$i = \int_Q s\,dq \tag{2}$$

ist der Augenblickswert der Wechselstromstärke definiert. Führt man, wie auf Seite 6 eine analoge Bezeichnung für den Mittelwert der Stromdichte über den Querschnitt ein, so erhält (2) die Form:

$$i = Q M_q(s). \tag{3}$$

Für die so definierte Wechselstromstärke gilt dann offenbar der erste Kirchhoffsche Satz, wonach in einem Knotenpunkt einer Stromverzweigung in jedem Augenblick die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme ist. Demnach wird auch die Summation zweier nach Gleichung (3) definierter Ströme ebenso ausgeführt, als ob es sich um gleichmäßig verteilte Ströme handelt.

Aus dem so definierten Augenblickswert bildet man weiter nach Gleichung (4) auf S. 7 den Effektivwert:

$$J^2 = M_t(i^2) = Q^2 M_t M_q{}^2(s). \tag{4}$$

Nun hatten wir gesehen (S. 66), daß man die Wärmeentwicklung in einem Stromleiter

$$P = J^2 R_v \tag{5}$$

setzt, wo man R_v den Leistungswiderstand nennt. Wäre die Stromverteilung gleichmäßig, so wäre für einen einzelnen zylindrischen Leiter R_v gleich dem Ohmischen Widerstand. Bei ungleichmäßiger Stromverteilung ist dies aber nicht der Fall.

In einem Stromfaden von der Länge 1 und dem Querschnitt dq wird zeitlich die mittlere Wärme:

$$M_t\left(di^2 \cdot \frac{\sigma}{dq}\right) = M_t(s^2 \sigma dq)$$

entwickelt, wo σ den spezifischen Widerstand bedeutet. Summiert man über den ganzen Querschnitt, so ist die in einem Leiterstück von der Länge 1 entwickelte Wärme:

$$P = \sigma \int_Q M_t(s^2) dq = Q \sigma M_q M_t(s^2). \tag{6}$$

Durch Einsetzen der Werte aus (4) und (5) folgt also:

$$R_v = \frac{\sigma}{Q} \frac{M_q M_t(s^2)}{M_t M_q^2(s)}. \tag{7}$$

Nun ist aber:

$$R_0 = \frac{\sigma}{Q} \tag{8}$$

der Ohmische Widerstand des Leiterstückes; (7) läßt sich daher auch schreiben:

$$\frac{R_v}{R_0} = \frac{M_q M_t(s^2)}{M_t M_q^2(s)}. \tag{9}$$

Diese Gleichung bringt allgemein zum Ausdruck, wie durch die verschiedenen Mittelbildungen nach der Zeit und über den Querschnitt, sich der Leistungswiderstand vom Ohmischen unterscheidet. Hat man es mit einwelligen Strömen zu tun, so kann man die Stromdichte $\mathfrak{S}$ durch die symbolische Methode ausdrücken:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} j, \tag{10}$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ reell sein sollen; dann ist:

$$M_t(s^2) = A^2 + B^2$$

und daher

$$\frac{R_v}{R_0} = \frac{M_q(A^2) + M_q(B^2)}{M_q^2(A) + M_q^2(B)}. \tag{11}$$

Nun haben wir aber auf S. 47 bewiesen, daß allgemein $\sqrt{M(A^2)} \geqq M(A)$ ist; folglich ist allgemein:

$$R_v \geqq R_0. \tag{12}$$

Der Leistungswiderstand eines zylindrischen Leiters ist also im allgemeinen größer als der Ohmische.

Seine Berechnung bietet in den meisten Sonderfällen unüber-

windliche Schwierigkeiten; man ist in diesen Fällen auf das Experiment angewiesen. Für einige einfache Anordnungen aber ist die Rechnung durchführbar. Als Beispiel einer solchen wählen wir eine unendlich große planparallele Kupferplatte von der Dicke d, die von geraden einander parallelen Stromfäden durchflossen wird. Dann hat auch das zugehörige magnetische Feld überall dieselbe Richtung; und zwar steht diese auf der Richtung der Stromfäden senkrecht. Außerhalb der Platte sei das magnetische Feld auf der einen Seite homogen, auf der anderen gleich Null. Eine der beschriebenen ähnliche Verteilung von Strömen und Feldern finden wir bei Transformatoren, die mit rechteckigen Kupferschienen bewickelt sind, oder bei zwei einander parallelen, breiten Kupferschienen, welche eine Hinleitung und Rückleitung desselben Wechselstromes bilden. In die Plattenfläche, welche an das magnetische Feld Null stößt, legen wir die xz Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 37). Das Feld falle in die Richtung der z Achse, der Strom in die Richtung der x Achse.

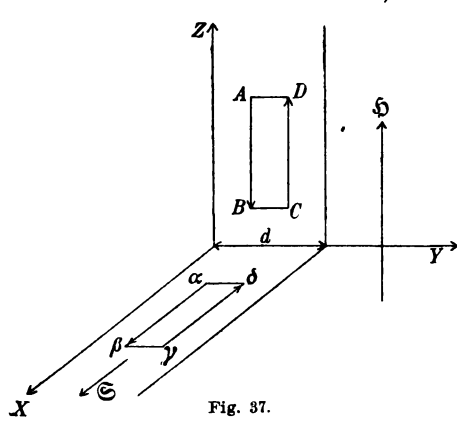


Fig. 37.

Wir wenden die beiden Maxwellschen Hauptgleichungen auf das Problem an. Nach der ersten ist das Linienintegral $\int \mathfrak{H} ds$, genommen über eine beliebige geschlossene Kurve, gleich $4\pi x$ Summe aller Ströme, die durch die Begrenzungskurve treten. Wendet man diesen Satz auf das unendlich schmale Rechteck $ABCD$ an, so liefern nur die Seiten AB und CD einen Beitrag zum Linienintegral; sind $AB = CD = 1$, so ergibt sich:

$$-\mathfrak{H} + \left(\mathfrak{H} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y}\right) dy = 4\pi \mathfrak{S} dy$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} = 4\pi \mathfrak{S}. \tag{13}$$

Die zweite Maxwellsche Hauptgleichung besagt, daß das Linienintegral der elektrischen Feldstärke $\int \mathfrak{E} ds$ genommen über eine

beliebige geschlossene Kurve gleich der zeitlichen Abnahme des magnetischen Induktionsflusses ist, der durch die Schleife tritt. Hierbei ist in einem Leiter die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E} = \mathfrak{S}\sigma$ zu setzen, wo $\mathfrak{S}$ wieder die Stromdichte, σ den spezifischen Widerstand bedeutet. Wendet man diesen Satz auf das Rechteck $\alpha\beta\gamma\delta$ an, das die Länge 1 und die Breite dy hat, so liefern wiederum nur die beiden langen Seiten $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ Beiträge zum Linienintegral.

$$\mathfrak{E} - \left(\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} dy\right) = - \frac{\partial (\mathfrak{H}\, dy)}{\partial t}$$

oder

$$\sigma \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

und wenn wir die symbolische Bezeichnung anwenden:

$$\sigma \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} = j\omega \mathfrak{H}. \tag{14}$$

Aus (13) und (14) ergeben sich die gleichlautenden Differentialgleichungen für $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial y^2} = \frac{4\pi\omega}{\sigma} j\mathfrak{S} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial y^2} = \frac{4\pi\omega}{\sigma} j\mathfrak{H}. \tag{15}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2\pi\omega}{\sigma}}, \tag{16}$$

so ist:

$$\mathfrak{H} = f e^{\varkappa(1+j)y} + g e^{-\varkappa(1+j)y},$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $\mathfrak{H}$; f und g sind Integrationskonstante. Da für $y = 0$ auch $\mathfrak{H} = 0$ sein soll, so ist $g = -f$ und:

$$\mathfrak{H} = f\left(e^{\varkappa(1+j)y} - e^{-\varkappa(1+j)y}\right). \tag{17}$$

Aus Gleichung (13) und (17) folgt:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} = \frac{f\varkappa(1+j)}{4\pi}\left(e^{\varkappa(1+j)y} + e^{-\varkappa(1+j)y}\right). \tag{18}$$

Die Mittelwertberechnung in bezug auf den Querschnitt ergibt:

$$M_q(\mathfrak{S}) = \frac{1}{d}\int_0^d \mathfrak{S}\, dy = \frac{1}{4\pi d} \mathfrak{H}_d.$$

Daraus findet man das Quadrat des zeitlichen Mittelwertes, indem man auf der rechten Seite j durch $-j$ ersetzt und die so gewonnenen Ausdrücke miteinander multipliziert:

$$(19)\qquad \begin{aligned} M_t M_q^2(\mathfrak{S}) &= \frac{f^2}{16\pi^2 d^2}\left(e^{\varkappa(1+j)d} - e^{-\varkappa(1+j)d}\right)\left(e^{\varkappa(1-j)d} - e^{-\varkappa(1-j)d}\right) \\ &= \frac{2f^2}{16\pi^2 d^2}(\mathfrak{Cof}.\ 2\varkappa d - \cos 2\varkappa d). \end{aligned}$$

Andrerseits ist:

$$M_t(\mathfrak{S}^2) = \frac{f^2\varkappa^2(1+j)(1-j)}{16\pi^2}\left(e^{\varkappa(1+j)y} + e^{-\varkappa(1+j)y}\right)\left(e^{\varkappa(1-j)y} + e^{-\varkappa(1-j)y}\right) =$$

$$= \frac{4f^2\varkappa^2}{16\pi^2}(\mathfrak{Cof}.\ 2\varkappa y + \cos 2\varkappa y)$$

und

$$(20)\qquad M_q M_t(\mathfrak{S}^2) = \frac{4f^2\varkappa^2}{16\pi^2}\,\frac{1}{2\varkappa d}\,(\mathfrak{Sin}.\ 2\varkappa d + \sin 2\varkappa d).$$

Setzt man die Ausdrücke (19) und (20) in Gleichung (9) ein, so ergibt sich:

$$(21)\qquad \frac{R_\nu}{R_0} = \varkappa d\,\frac{\mathfrak{Sin}.\ 2\varkappa d + \sin 2\varkappa d}{\mathfrak{Cof}.\ 2\varkappa d - \cos 2\varkappa d}.$$

Für kleine Argumente kann man die hyperbolischen und die Kreisfunktionen in Reihen entwickeln. Dadurch erhält man die Näherungsformel:

$$(22)\qquad \frac{R_\nu}{R_0} = 1 + \frac{(2\varkappa d)^4}{180} = 1 + \frac{16}{45}\,\frac{\pi^2\omega^2}{\sigma^2}\,d^4. \qquad (\nu \text{ klein.})$$

Ist z. B. die Platte aus Kupfer ($\sigma = 1700$) und hat der Wechselstrom die Frequenz 50 ($\omega = 100\pi$), so wird:

$$(23)\qquad \frac{R_\nu}{R_0} = 1 + 0{,}12\,d^4,$$

wo d in cm zu messen ist.

Für großes Argument werden die beiden hyperbolischen Funktionen einander gleich und groß gegen die Kreisfunktionen. D. h. bei großen Frequenzen kann man setzen:

$$(24)\qquad \frac{R_\nu}{R_0} = \sqrt{\frac{2\pi\omega}{\sigma}}\,d. \qquad (\nu \text{ groß.})$$

Der Wechselstromwiderstand wird also proportional der Wurzel aus der Frequenz.



...NERS HANDBÜCHER ...DEL UND GEWERBE

HERAUSGEGEBEN VON

DR. VAN DER BORGHT GEH. REG.-RAT IN BERLIN — **DR. SCHUMACHER** PROF. AN DER UNIV. BONN — **DR. STEGEMANN** GEH. REG.-RAT IN BRAUNSCHWEIG

Die Handbücher sollen in erster Linie dem Kaufmann und Industriellen ein geeignetes Hilfsmittel bieten, sich rasch ein wohlbegründetes Wissen auf den Gebieten der Handels- und der Industrielehre, der Volkswirtschaft und des Rechtes, der Wirtschaftsgeographie und der Wirtschaftsgeschichte zu erwerben, wie es die erhöhten Anforderungen des modernen Wirtschaftslebens erfordern. Aber auch allen Volkswirtschaftlern und Politikern sowie den Verwaltungs- und Steuerbehörden wird die Sammlung willkommen sein, da sie in ihr die so oft nötigen zuverlässigen Nachschlagewerke über die verschiedenen kaufmännischen und industriellen Fragen finden werden.

Die Bilanzen der privaten Unternehmungen.

Von Dr. phil. et jur. **Rich. Passow.** [XII u. 355 S.] gr. 8. 1910. Geh. M 8.40, in Leinwand geb. M 9.—

„... Das vorliegende Buch will allen denjenigen, die sich aus geschäftlichen oder wissenschaftlichen Gründen mit den Bilanzen geschäftlicher Unternehmungen befassen, eine Einführung in dieses komplizierte Gebiet geben und sie zu verständnisvoller Lektüre der Bilanzen anleiten.... Auf streng wissenschaftlicher Grundlage und umfassender Verwertung der vorliegenden deutschen und ausländischen Bilanzliteratur beruhend, ist es in allen seinen Teilen so gehalten, daß es keine speziellen Kenntnisse voraussetzt. Besonderer Wert ist darauf gelegt, die Anschaulichkeit der Darstellung dadurch zu erhöhen, daß überall Beispiele aus der Praxis des Bilanzwesens angeführt sind. Der Text ist übersichtlich gegliedert..., Alles in allem ein treffliches Buch!" **(Centralblatt f. d. Zuckerindustrie.)**

Anlage von Fabriken.

Von **H. Haberstroh, E. Weidlich, E. Görts** und **Dr. R. Stegemann.** Mit 274 Abbild. u. Plänen sowie 6 Tafeln. [XIII u. 528 S.] gr. 8. 1907. Geh. M 12.—, in Leinw. geb. M 12.80.

„... Die Gesichtspunkte, unter denen der überaus reichhaltige und stellenweise sehr schwierige Stoff vorgetragen ist, entsprechen in jeder Weise den modernen Anforderungen an eine Fabrikanlage, d. h. es sind neben einer gewissen Formenschönheit in erster Linie doch immer die Zweckmäßigkeit, die hygienischen Bedürfnisse und das Nützlichkeits-prinzip berücksichtigt worden." **(Metallröhren-Industrie.)**

Betrieb von Fabriken.

Von **Dr. F. W. R. Zimmermann, A. Johanning, H. v. Frankenberg** u. **Dr. R. Stegemann.** Mit 3 Abbild. u. zahlreichen Formularen. [VI u. 436 S.] gr. 8. 1905. Geh. M 8.—, in Leinw. geb. M 8.60.

„Das Buch bietet eine Fülle von Anregung und Belehrung und dürfte insbesondere für die leitenden technischen und kaufmännischen Persönlichkeiten wegen der umfassenden Übersichten auf allen Gebieten des Fabrikbetriebes sehr zu empfehlen sein." **(Elektrotechnische Zeitschrift.)**

Einführung in die Elektrotechnik.

Physikalische Grundlagen und technische Ausführungen. Von **R. Rinkel.** Mit 445 Abbildungen. [VI u. 464 S.] gr. 8. 1908. Geh. M 11.20, in Leinw. geb. M 12.—

„... Sowohl dem kaufmännisch gebildeten Industriellen wie dem Ingenieur, der einen Überblick zu erwerben wünscht, wird das Buch eine brauchbare Handhabe dazu bieten. Der Stoff wird so vortrefflich behandelt, daß der Leser eine klare Vorstellung von den Grundbedingungen und Schwierigkeiten erhält." **(Praktischer Maschinen-Konstrukteur.)**

Die Eisenindustrie.

Von **Oskar Simmersbach.** Mit 92 Abbild. [X u. 322 S.] gr. 8. 1906. Geh. M 7.20, in Leinw. geb. M 8.—

„... Der Verfasser hat es mit großem Geschick verstanden, überall nur das Wesentliche zu bringen, der technische Teil ist knapp und klar geschrieben; in dem wirtschaftlichen Teil sind die statistischen Angaben sorgfältig so ausgewählt und zusammengestellt, daß sie, ohne zu ermüden, doch ein möglichst vollständiges Bild geben. Seinen Hauptwert wird das Buch wegen der vielen Zahlenangaben als Nachschlagewerk im täglichen Betrieb haben." **(Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.)**